ANEXO 14

UNA CONCEPCIÓN MECÁNICA DEL TERRITORIO

1. MOMENTO TERRITORIAL ESTÁTICO

Este concepto ya ha sido introducido en los anteriores apartados 2.2.2 y 2.3.2 ("Masa de renta homogénea en el campo continuo") del anterior Anexo 13 de nuestra tesis, donde lo empleábamos eficazmente para la determinación de las coordenadas geográficas de los centros territoriales de las masas de renta. Pues bien, siguiendo con nuestro símil físico-mecánico, y por aplicación a la ordenación territorial del teorema físico de momentos, veamos que *"el momento territorial estático, o momento de 1er. orden de un territorio A con respecto a otro punto o eje del territorio es igual a la suma algebraica de los productos de las áreas elementales (como las municipales) por sus respectivas distancias al punto o eje considerado, denominándose, respectivamente, momento territorial estático polar o áxico".* Así definido, en función del área, se trata evidentemente de un momento superficial o geométrico (FRANQUET, 1990/91).

De este modo, dado un territorio A y un "eje" **e** situado en sus inmediaciones (pudiera considerarse, como tal, un río, una vía de comunicación o, simplemente, una frontera territorial), denominaremos como "momento estático de A con respecto al eje **e**", a la suma integral expresada por:

$$M_e = \int_A y \cdot dA = \sum_i A_i \cdot y \quad ,$$

siendo **y** la distancia del elemento infinitesimal de superficie dA a dicho eje geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario. Al respecto, pueden verse las figuras siguientes:

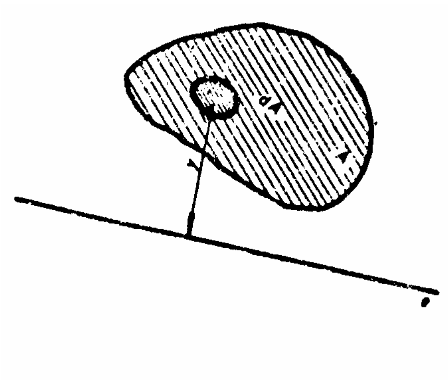


Fig. A-14.1. Momento estático de un en territorio en relación a un eje cualquiera.

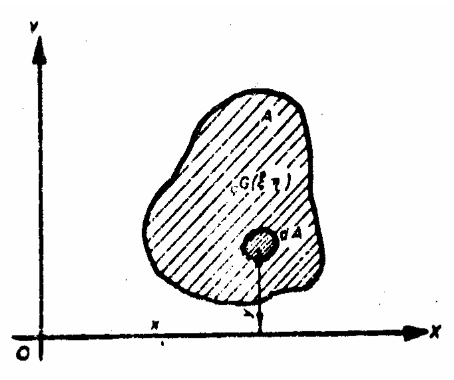


Fig. A-14.2. Momento estático de un territorio relación a los ejes cartesianos rectangulares.

Igualmente, por definición y aplicando el teorema de Varignon, se tendrán los siguientes momentos con respecto a los dos ejes coordenados, para un territorio cualquiera de área A y de centro de masas de renta G (ξ, η):

$$\begin{cases} M_x = A \cdot \eta = \int_A y \cdot dA = \int_A y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot y \\ M_y = A \cdot \xi = \int_A x \cdot dA = \int_A x \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \end{cases}$$

expresiones éstas en las que las coordenadas ξ y η del punto G nos definen el centro de gravedad o "centro de masas" del territorio estudiado, que es el punto en el que puede concebirse concentrada el área total del territorio. Lógicamente, en el caso de operar con un territorio de densidad de renta continua y homogénea (constante), también en dicho punto puede suponerse concentrada la masa de renta total del territorio, sin que varíen los resultados. De dichas expresiones se deduce, en fin, que el momento estático de un territorio respecto de todo eje que pase por su "centro de masas" es nulo, dado que será igual al producto del área del territorio por la coordenada nula del centro de las masas socioeconómicas respecto de dicho eje territorial.

Por otra parte, el momento territorial estático polar del territorio A con respecto al punto o polo 0 (o, o), vendrá dado por la suma integral:

$$M_O = \int_A r \cdot dA = \sum_i A_i \cdot r$$

Como **r** es la distancia del elemento (municipal) dA al origen de coordenadas, por el teorema de Pitágoras se tendrá que:

$$M_O = \int_A r \cdot dA = \int_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dA = \iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx \cdot dy$$

, o bien, en el campo discreto:

$$M_O = \sum_i A_i \cdot r = \sum_i A_i \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como ya hemos visto anteriormente, si un territorio fuera de configuración plantar simétrica con respecto a un determinado eje, su centro de masas se hallaría sobre dicho eje de simetría siempre y cuando su densidad de masa fuese continua y homogénea. Esto resulta evidente por el hecho de que los momentos de las áreas que se encuentran en los lados opuestos del eje de simetría son numéricamente iguales pero de signos contrarios. Así mismo, si el territorio posee un centro geométrico o geográfico, éste será, precisamente, su centro de masas en el supuesto, claro está, de trabajar con masas de renta homogéneas en el campo continuo.

Normalmente, la unidad física de medida de los momentos territoriales estáticos, que se empleará en los estudios de Ordenación Territorial, será el Km^3 o el Mm^3.

2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA Y CENTRÍFUGOS

De entrada, podríamos conceptuar la "inercia territorial" como una propiedad en virtud de la cual un cierto territorio opone resistencia a toda causa que tienda a modificar fehacientemente su actual "status" económico-espacial.

Pues bien, definiremos como *"momento de inercia de un territorio A con respecto a otro punto o eje del territorio a la suma algebraica de los productos de las áreas elementales (como las municipales) por los cuadrados de sus respectivas distancias al punto o eje considerado, denominándose, respectivamente, momento territorial de inercia polar o áxico (ecuatorial)".* Constituye, obviamente, una extensión provechosa del concepto definido en el epígrafe anterior, tratándose, también, de un momento superficial o geométrico.

De este modo, dado un cierto territorio A y un "eje" **e** situado en sus inmediaciones (geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario), denominaremos como "momento de inercia de A con respecto al eje" a la expresión integral:

$$I_e = \int_A y^2 \cdot dA = \sum_i A_i \cdot y^2 ,$$

siendo **y** la distancia del elemento infinitesimal de superficie del territorio dA a dicho eje. Así:

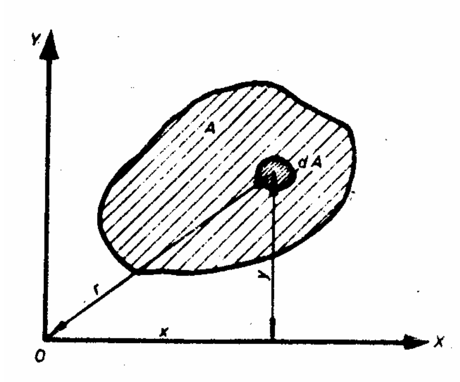


Fig. A-14.3. Momento de inercia polar de un territorio (ejes coordenados).

De igual forma, dado un cierto territorio A y los ejes coordenados **x** e **y**, los momentos territoriales de inercia ecuatoriales con respecto a los ejes **x** e **y** vendrán dados, respectivamente, por las expresiones (PÉREZ, 1976):

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot y^2$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x^2 \ ,$$

y el momento de inercia polar del territorio A con respecto al punto o polo O (0,0), será la suma integral:

$$I_O = \int_A r^2 \cdot dA = \iint_A (x^2 + y^2)\, dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot r^2 \ ,$$

por lo que también se cumplirá que:

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_y + I_x = \sum_i A_i \cdot (x^2 + y^2) \ ,$$

que resulta evidente por la propiedad aditiva del integrando, con lo que podremos enunciar el siguiente teorema:

"el momento de inercia polar de un territorio es igual a la suma de sus momentos de inercia ecuatoriales respecto a dos ejes rectangulares que pasen por el polo".

Sean ahora dos ejes oblicuos, formando un ángulo θ y un territorio A del que queremos calcular el momento de inercia polar en función de los momentos de inercia simples y compuesto (cuyo concepto veremos seguidamente).

$x = \overline{OA} \cdot \text{sen}\ \theta$

$\overline{OA} = x / \text{sen}\ \theta$

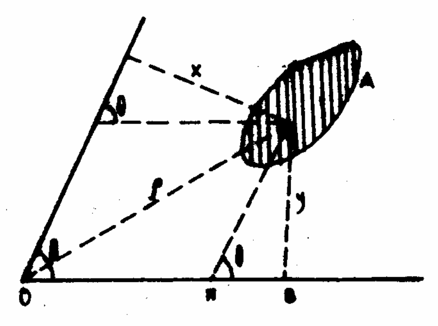


Fig. A-14.4. Momento de inercia polar de un territorio (ejes oblicuos).

El momento elemental es: $\rho^2 \cdot dw$, pero se tiene que:

$$\rho^2 = y^2 + \overline{OB^2} = y^2 + \left(\overline{OA} + \overline{AB^2}\right) = y^2 + \overline{OA^2} + 2 \times \overline{OA} \times \overline{AB} + \overline{AB^2}$$

Ahora bien:

$y / \overline{AB} = \text{sen}\ \theta / \cos\theta = \text{tg}\ \theta$; $\overline{AB} / y = \cos\theta / \text{sen}\ \theta = \text{cotg}\ \theta$, o sea:

$\overline{AB} = y \cdot \cos\theta / \text{sen}\ \theta = y \cdot \text{cotg}\ \theta$; además, se cumple que: $\overline{OA} = x / \text{sen}\ \theta$

de dónde:

$$\rho^2 = y^2 + \frac{x^2}{\text{sen}^2\theta} + \frac{2 \cdot xy \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} + \frac{y^2 \cdot \cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} .$$

$$I_O = \int \rho^2 \cdot dw = 1 / \text{sen}^2\theta \left[\int y^2 \cdot dw + \int x^2 \cdot dw + \int 2xy \cdot \cos\theta \cdot dw\right] =$$

$$= 1 / \text{sen}^2\theta \cdot [\, I_y + I_x + 2\cos\theta \cdot I_{xy}\,] . \quad (*)$$

Así pues, genéricamente, el momento de inercia polar de un territorio es igual a una fracción que tiene por numerador la suma de los momentos simples y del doble del producto del compuesto por el coseno del ángulo que forman los ejes coordenados, y por denominador el cuadrado del seno de dicho ángulo.

Si consideramos, ahora, a un territorio como si de un sólido o cuerpo físico se tratase, con una cierta masa **m** (de renta disponible, población de derecho, recursos, ...), el momento territorial de inercia se obtendrá multiplicando los elementos de masa (municipales) por los cuadrados de las distancias al elemento de referencia considerado; es decir, basta con introducir el factor "densidad" (d, δ) fuera o dentro de las integrales, según se trate de un territorio homogéneo o no.

En efecto, veamos que, razonando en los mismos términos que en el epígrafe 2.2.2 del anexo anterior, si la densidad superficial γ no es igual a 1 y es, por otra parte, una cierta función de **x** e **y**, es decir, si se cumple que:

$$\gamma = \gamma\ (x, y) \quad ,$$

entonces la masa de población o de renta del dominio parcial Δs_i, será igual a:

$$\gamma \cdot (\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\ s_i$$

(con precisión de hasta las infinitesimales de orden superior) y, por esto, el momento de inercia territorial respecto al origen de coordenadas, vendrá dado por:

$$I_0 = \iint_A \gamma\ (x, y) \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \quad ,$$

y sería del tipo másico o ponderal.

Se denominará, así mismo, *"módulo resistente territorial, a la relación o razón entre el momento de inercia territorial y la distancia mayor entre el centro de masas del territorio y cualquier otro lugar geográfico del mismo",* por lo que vendrá expresado, normalmente, en Km^3. Esto es:

$$W = I\ /\ d_{máx.}$$

En general, desde la perspectiva de la geometría de las masas socioeconómicas de población o de renta, veamos que en el caso de que se trate de un territorio con distribución continua de la masa socioeconómica en él contenida, se supone definida una cierta función de densidad: $\gamma = \gamma\ (\vec{r})$, en dónde γ es la densidad en un punto o lugar geográfico cuyo vector de posición es $\vec{r}$.

Por otra parte, se denomina *"producto de inercia, momento centrífugo o momento de inercia compuesto respecto a dos ejes perpendiculares entre sí **x** e **y** de un territorio A, a la suma algebraica de los productos de los elementos de superficie (municipios) por las respectivas distancias a ambos ejes", que designaremos por:*

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \cdot y \quad ,$$

que opone una función subintegral rectangular frente al integrando cuadrático de los momentos territoriales de inercia simples, ya definidos. También podría denominársele "momento de desviación territorial", correspondiendo, la anterior definición, al de tipo superficial o geométrico.

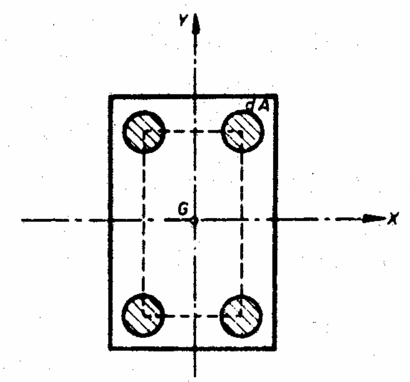
De hecho, tanto los momentos de inercia como los centrífugos de un territorio serán momentos de 2º orden. Evidentemente, si las superficies territoriales analizadas no constituyen un sistema o espacio contínuo sino discreto (habida cuenta de la notoria heterogeneidad en la distribución de las masas), las anteriores sumas integrales pasarán a ser sumas algebraicas, expresando el signo $\int$ (integral) por su sustituto $\sum$ (sumatorio), que es lo que venimos haciendo en todos los casos.

Si se verifica la nulidad del momento territorial centrífugo anteriormente definido, o sea:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 0 = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \cdot y \quad ,$$

diremos que ambos ejes coordenados son "principales de inercia", pues a todo producto: x · y · dA, le corresponde otro de igual valor absoluto y de signo contrario. Es decir, que a un área elemental o municipal dA del territorio de abscisa **x** le corresponde otra superficie infinitesimal igual de abscisa **-x** al otro lado del eje de ordenadas, con lo que podremos enunciar que: ***"****Dos ejes territoriales son principales de inercia cuando son perpendiculares entre sí y el momento centrífugo respecto a ellos es nulo".*

Fig. A-14.5. Ejes territoriales principales de inercia.



Así pues, si a un territorio determinado pudieran asimilársele -con cierto grado de aproximación, habida cuenta de su configuración geométrica- dos ejes de simetría, estos ejes serían "principales de inercia". Si dicho territorio sólo tuviera un eje de simetría, este eje y su normal que pasase por el centro territorial de masas serían "principales de inercia" y el momento territorial centrífugo respecto a ellos resultaría nulo.

La unidad física de expresión de los productos territoriales de inercia será, normalmente, el Km^4, o sea, la misma que la de los momentos territoriales de inercia, pero con la diferencia notoria, respecto a éstos, de que el resultado no tiene por qué ser siempre positivo, sino que puede ser una cantidad negativa o nula, ya que **x** e **y** pueden ser negativos, positivos o nulos, mientras que en el caso de los momentos territoriales de inercia polares o áxicos, su magnitud resulta esencialmente positiva.

3. RADIOS TERRITORIALES DE GIRO

3.1. RADIO DE GIRO TERRITORIAL SUPERFICIAL O GEOMÉTRICO

Íntimamente ligado al concepto de "momento de inercia territorial" está el del "radio medio de giro". En las aplicaciones prácticas de los estudios de ordenación territorial que nos honramos en propugnar, serán frecuentes y no necesariamente odiosas las comparaciones entre los momentos de inercia territoriales y el área total del propio territorio (municipio, comarca, región, nación); dichas relaciones nos conducirán a obtener, alternativamente, el radio de giro territorial, que viene expresado por la raíz cuadrada del momento de inercia respecto a un eje dividido por el área del territorio, así:

$$\rho_e = \sqrt{I_e / a} = \sqrt{\int_A y^2 \cdot dA / A} = \sqrt{\sum_i A_i \cdot y^2 / A}$$

con el siguiente significado:

$$\begin{cases} I_e = & \text{momento territorial de inercia del territorio A con respecto a un eje cualquiera } \mathbf{e} \text{ } (km^4 \text{ ó } Mm^4). \\ \rho_e = & \text{distancia al eje considerado del centro territorial de masas, supuesta aplicada en dicho centro el área o superficie total del territorio (km.ó Mm.).} \\ A = & \text{área total del territorio analizado } (km^2 \text{ ó } Mm^2). \end{cases}$$

En el caso normal de trabajar en un espacio discreto, el radio de giro coincidirá con la distancia en línea recta entre las capitalidades o centros de masas de los territorios estudiados.

Paralelamente, los radios de giro o medios del territorio A respecto a los ejes coordenados **x** e **y** se expresarán, respectivamente, por:

$$\rho_x = \sqrt{I_x / A} \quad \text{y} \quad \rho_y = \sqrt{I_y / A}$$

Por último, definiremos el "momento territorial medio" como el cuadrado del correspondiente radio de giro, con lo que:

$$\begin{cases} I_x \text{ medio} = I_x / A = \rho_x^2 \\ I_y \text{ medio} = I_y / A = \rho_y^2 \end{cases}$$

3.2. RADIO DE GIRO TERRITORIAL MÁSICO O PONDERAL

En el caso de considerar al territorio como si se tratara de un sólido de masa **m** (que representara, por ejemplo, la renta familiar disponible total), el radio territorial de giro representaría, entonces, la distancia a la que habría que suponer situada una masa única de valor **m** para que tuviera el mismo momento ecuatorial de inercia respecto de dicho eje territorial **e**. En este caso, diremos que:

$$\rho_e = \sqrt{I_e / m}$$

y el momento de inercia I_e se habrá tenido que calcular, entonces, a partir de dicha masa **m**, y no en relación al área A.

Idénticas especificaciones metodológicas podríamos realizar para el caso de considerar a los ejes coordenados **x** e **y.** Efectivamente, en general, el momento territorial de inercia másico o ponderal vendrá dado por la adición de un número infinito de sumandos, a saber:

$$I = \sum_i m_i \cdot r^2 = \int_a^b r^2 \cdot dm$$

, siendo los límites de integración **a** y **b** los valores extremos que puede tomar la distancia **r.** Al respecto, conviene realizar las siguientes puntualizaciones:

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un punto o lugar geográfico,* es igual a la suma de los productos de la masa de renta de cada punto por el cuadrado de la distancia al punto o lugar geográfico de referencia.

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un eje territorial,* será lo mismo que en el caso anterior, pero computándose las distancias hasta dicho eje.

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un plano territorial,* se definirá de un modo análogo a los casos anteriores, pero tomándose las distancias hasta el plano en cuestión (que podría ser, v. gr., una superficie de nivel altimétrico).

Desde luego, conviene tener presente que el momento territorial de inercia con relación a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a tres planos perpendiculares que pasan por dicho punto del territorio; de manera que si en un territorio cualquiera consideramos un punto O como origen de coordenadas, por el que pasan los tres ejes OX, OY y OZ, perpendiculares entre sí, el momento de inercia territorial con relación a cada uno de dichos tres ejes vendrá dado respectivamente, por las expresiones:

$$I_x = \sum_i m_i\,(y^2 + z^2) = \int_m (y^2 + z^2)\cdot dm$$

$$I_y = \sum_i m_i\,(x^2 + z^2) = \int_m (x^2 + z^2)\cdot dm$$

$$I_z = \sum_i m_i\,(x^2 + y^2) = \int_m (x^2 + y^2)\cdot dm$$

habiendo generalizado el planteamiento del problema al espacio tridimensional, si bien, normalmente, el Análisis Territorial convencional limitará su campo de actuación al plano o espacio afín bidimensional euclídeo.

4. DETERMINACIONES USUALES

4.1. MOMENTOS ESTÁTICOS Y CENTROS TERRITORIALES DE MASAS

El momento estático territorial de A respecto de un cierto eje y, que supondremos forma parte de su contorno, o que es tangente a él, viene dado por la expresión:

$$M_y = \iint_A x \cdot dx \cdot dy = \int_0^a x \cdot \eta \cdot dx$$

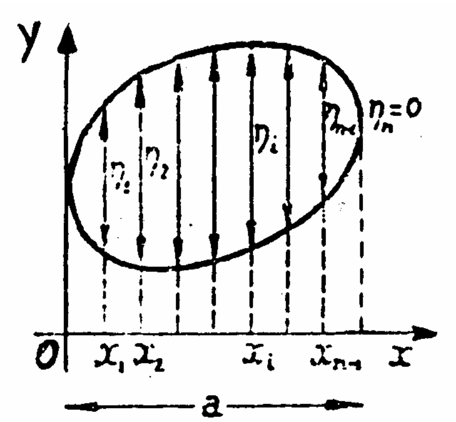


Fig. A-14.6. Territorio dividido en **n** subintervalos.

donde los η_i representan cada segmento de vertical de abscisa x comprendido en el interior del territorio. Dividiendo, ahora, el intervalo cerrado [O, a] en un número par de subintervalos iguales de amplitud unitaria (PUIG, 1970):

$$h = a / n$$, y siendo:

η_0, η_1, η_2, ..., η_i, ..., η_n, los segmentos de ordenadas interiores del territorio, correspondientes a los puntos de división, podremos aplicar a continuación cualquiera de las fórmulas aproximadas usuales de la Geometría métrica

(Poncelet, Simpson, Newton-Côtes, Gauss, Tchébishev u otras) al cálculo de dicha integral.

Desde luego, el número **n** de los puntos de división del intervalo es arbitrario; pero cuanto mayor sea este número tanto mayor será la precisión de los resultados a obtener. Para determinar el número de puntos de división que se deben tomar para calcular la integral con un grado de precisión dado, se pueden utilizar las fórmulas de evaluación de los errores cometidos durante el cálculo aproximado de la integral (FRANQUET, 1990/91).

Empleando, v. gr., la formulación de Simpson (que sustituye los arcos de curvas por arcos de parábolas cuadráticas o cúbicas), resultará:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_0 = x_0 \cdot \eta_0 = 0 \\ y_1 = x_1 \cdot \eta_1 = h \cdot \eta_1 \\ y_2 = 2 \cdot h \cdot \eta_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_{n-1} = (n-1) \cdot h \cdot \eta_{n-1} \\ y_n = n \cdot h \cdot \eta_n = 0 \end{array}}$$

De donde se tiene que:

$$M_y = h^2/3\ [0 + 4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot 3 \cdot \eta_3 + 2 \cdot 4 \cdot \eta_4 + \ldots + 4(n-1)\ \eta_{n-1} + 0]$$

$$A = h/3\ [0 + 4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot \eta_3 + 2 \cdot \eta_4 + \ldots + 4 \cdot \eta_{n-1} + 0]$$

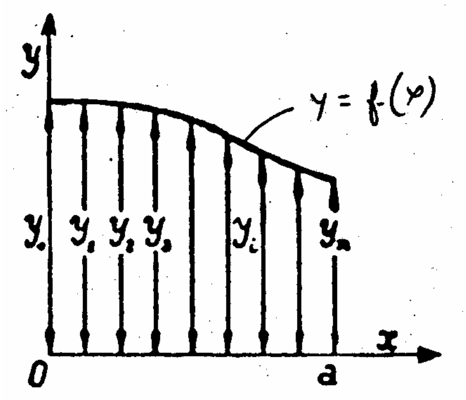
La distancia del centro territorial de masas al eje de ordenadas **y** será, pues:

$$\boxed{\xi = h\,\frac{4\cdot\eta_1 + 2\cdot 2\cdot\eta_2 + 4\cdot 3\cdot\eta_3 + 2\cdot 4\cdot\eta_4 + \ldots + 4(n-1)\eta_{n-1}}{4\cdot\eta_1 + 2\cdot\eta_2 + 4\cdot\eta_3 + 2\cdot\eta_4 + \ldots + 4\cdot\eta_{n-1}}}$$

Análogamente, podemos hallar la distancia del centro territorial de masas al eje **x** de abscisas, dividiendo o particionando el territorio en fajas horizontales paralelas.

Si se trata de un territorio de configuración geométrica asimilable a la de un trapecio mixtilíneo, como el que aparece representado en la figura siguiente:

Fig. A-14.7. Territorio de configuración trapecial mixtilínea.



, podemos también calcular el momento estático respecto del eje **x** integrando en la integral doble respecto a la función **y**, es decir, empleando la fórmula (PUIG, 1970):

$$M_X = \int_0^a \int_0^{y(x)} y \cdot dx \cdot dy = 1/2 \int_0^a y^2 \cdot dx$$

y aplicando a ella la fórmula de Simpson, resulta:

$$M_X = h/6\ (y_0^2 + 4\ y_1^2 + 2\ y_2^2 + 4\ y_3^2 + 2\ y_4^2 + 4\ y_5^2 + \ldots + y_n^2)\ ,$$

cuyo cociente por el área del territorio, como es sabido, nos dará la ordenada η del centro territorial de masas, a saber:

$$h = 1/2 \times \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_4^2 + 4y_5^2 + \ldots + y_n^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n}$$

considerando, también, que:

$$A = \int_0^a y \cdot dx = \iint_A dx \cdot dy\ ,$$

desde el propio concepto de integral definida e integral doble, respectivamente.

Veamos, en fin, que el conocimiento o deducción, siquiera aproximados, de la forma algebraica de la función real: y = f(x), que nos determina el contorno del territorio en estudio, posibilita, incluso, el cómputo mecanizado del área del mismo mediante el empleo de calculadoras científicas programables al respecto y existentes en el mercado. En cualquier caso, también los *software* derivados del diseño asistido por ordenador (CAD) y similares permiten la realización de los expresados cálculos con precisión y rapidez.

4.2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA

a) Territorio rectangular:

Tendrá, aproximadamente, una configuración planimétrica del tipo:

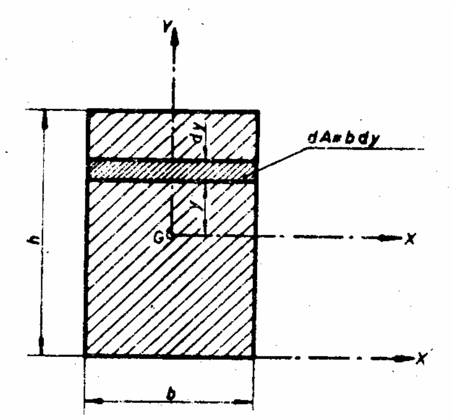


Fig. A-14.8. Territorio aproximadamente rectangular.

Por definición, el momento de inercia superficial o geométrico del territorio con respecto al eje **x** que pasa por el centro territorial de masas, es:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot h^3 / 12$$

Del mismo modo, por analogía, se tendrá que:

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = h \cdot b^3/12$$, y con respecto a la base:

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot h^3/ 3$$

En el caso particular de que b = h (territorio sensiblemente cuadrado):

$$I_x = I_y = b^4 / 12 \quad ; \quad I_{x'} = I_{y'} = b^4 / 3$$

La "elipse principal de inercia territorial", cuyo centro coincide con el centro territorial de masas, tendrá una ecuación de la forma:

$$K^2 = I_x \cdot \xi^2 + I_y \cdot \eta^2 = b \cdot h / 12 \, (h^2 \xi^2 + b^2 \eta^2) = b^3 h^3 / 12 \, (\xi^2/b^2 + \eta^2/h^2)$$

, que constituye una elipse semejante a la inscrita en el rectángulo territorial. Se puede afirmar, sin necesidad de efectuar cálculo alguno, que el producto territorial de inercia I_{xy} es nulo por la simetría de la figura y, por lo tanto, de la elipse.

Por otra parte, en el caso de un territorio rectangular, se tendrá un "módulo resistente territorial", con respecto al eje **x**, de:

$$W_x = b \cdot h^3 / 12 : h / 2 = b \cdot h^2 / 6$$

Además, siendo el momento de inercia polar I_0 con respecto del centro territorial de las masas socioeconómicas:

$$I_0 = b \cdot h\,(b^2 + h^2) / 12 \quad ,$$

se tendrá un módulo resistente territorial polar, con relación a dicho centro territorial de masas, de:

$$W_0 = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)/12}{\sqrt{(b/2)^2 + (h/2)^2}} = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)}{6\sqrt{(b^2 + h^2)}} = \frac{b \cdot h\sqrt{(b^2 + h^2)}}{6} \quad .$$

Se comprende, por otra parte, que en la praxis de la delimitación geofísica de un territorio cuya planta sea de configuración aproximadamente rectangular (por parte de la Administración Pública competente al respecto), si se disminuye el valor de la base **b** y aumenta, en la misma proporción, el de la altura **h,** se incrementará el valor de los momentos de inercia territoriales I_x e $I_{x'}$, contrariamente a lo que sucederá con I_y. Ello resultará de particular importancia al considerar los "grados de conexión territorial" definidos en el posterior epígrafe 13 del presente anexo de nuestra tesis, así como su incidencia en el equilibrio territorial, puesto que al aumentar el momento de inercia disminuye la atracción ejercida desde el eje territorial de referencia considerado hacia el resto del territorio en estudio.

b) Territorio circular:

Tendrá, aproximadamente, una configuración planimétrica del tipo:

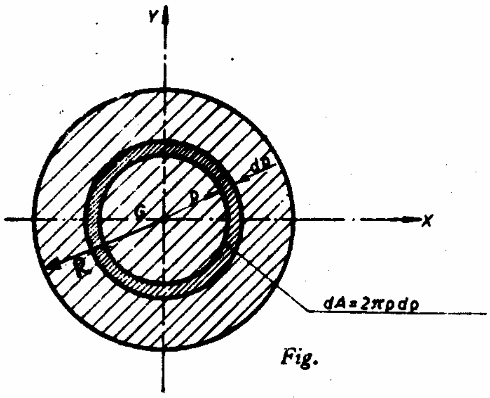


Fig. A-14.9. Territorio aproximadamente circular.

Por definición, el momento polar de inercia superficial o geométrico I_0

respecto del centro territorial de masas, dividiendo el círculo del territorio en anillos de espesor dρ, será:

(Teniendo en cuenta que la ecuación de la circunferencia, expresada en coordenadas polares es: $\rho = R$).

$$I_0 = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{d/2} 2 \cdot \pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = \pi \cdot d^4 / 32 = \pi \cdot R^4 / 2 \quad \text{, y también:}$$

$$I_x = I_y = \pi \cdot d^4 / 64 = \pi \cdot R^4 / 4$$

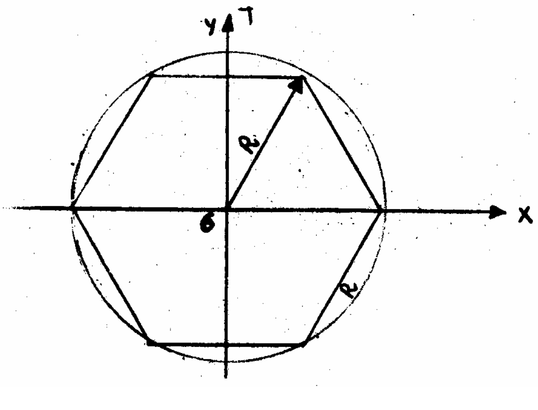
, puesto que sumando los momentos territoriales de inercia respecto de dos diámetros rectangulares, resulta que: $I_x + I_y = 2\ I_x = 2\ I_y = I_o$.

Del mismo modo, los módulos resistentes territoriales con relación al eje **x** y el polar con relación al centro territorial de masas, vendrán dados, respectivamente, por:

$$W_x = \pi \cdot R^3 / 4 = \pi \cdot d^3 / 32 \quad \text{, y también:} \quad W_0 = \pi \cdot R^3 / 2 = \pi \cdot d^3 / 16 \text{ ,}$$

de lo que se infiere que: $\boxed{W_o = 2 \cdot W_x}$

Una variante de la configuración circular, mayormente aproximativa a la realidad territorial, tendería a considerar el perímetro del territorio en cuestión como formado por bases rectas, configurando polígonos regulares (pentágonos, hexágonos, octógonos,...). Y así, veamos que en el caso concreto del hexágono, se tendrá:



$$I_x = 5\sqrt{3} / 16 \cdot R^4 \approx 0'5413 \cdot R^4 \text{ ,}$$

Fig. A-14.10. Territorio de perímetro poligonal hexagonal.

, con un "módulo resistente territorial", con respecto al mismo eje **X**, de:

$$W_x = 5/8 \cdot R^3 = 0'625 \cdot R^3 \text{ .}$$

En el caso del octógono, se tendrá:

$I_X = \frac{1+2\sqrt{2}}{6} \cdot R^4 \approx 0'6381 \cdot R^4$,

y también: $W_X = 0'6906 \cdot R^3$.

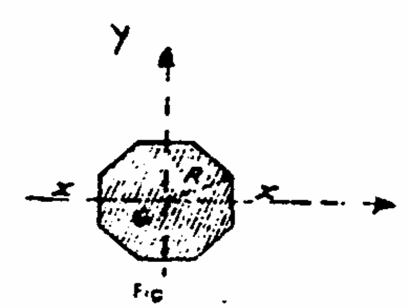


Fig. A-14.11. Territorio de perímetro poligonal octogonal.

Veamos, por último, que una deformación de la planta circular puede conducir a la configuración elíptica asimilable de un territorio cualquiera, así:

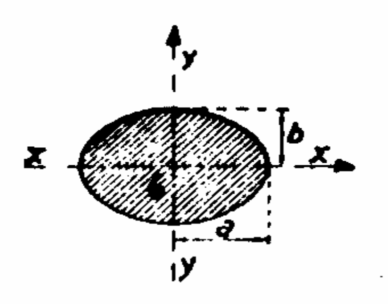


Fig. A-14.12. Territorio de planta elíptica.

, siendo **2a** el semieje mayor y **2b** el semieje menor, con unos módulos resistentes territoriales respectivos, de:

$$\begin{cases} W_{xx} = I_{xx} / b = \pi \cdot a \cdot b^2 / 4 \\ W_{yy} = I_{yy} / a = \pi \cdot b \cdot a^2 / 4 \end{cases} ,$$

de los que pueden deducirse las relaciones genéricas:

$$\boxed{a^2 \cdot I_{xx} = b^2 \cdot I_{yy}}$$ y , también:

$$\boxed{a \cdot W_{xx} = b \cdot W_{yy}}$$

c) Ejemplos de aplicación:

Como aplicación sencilla e ilustrativa de los supuestos anteriores (FRANQUET, 1990), calculemos ahora los momentos territoriales de Cataluña y de la provincia de Tarragona, asimilando ambos territorios, respectivamente, a un triángulo isósceles y a un rectángulo, tal como puede verse a continuación (se tratará, pues, de momentos estrictamente superficiales o geométricos):

a) Caso de Cataluña:

En el caso del conjunto de Cataluña, por tratarse de un territorio triangular, se tendrá un momento ecuatorial de inercia con respecto **al eje X que pasa por el centro territorial de masas G** (sito sobre la comarca del "Solsonès", y próximo a su punto de confluencia con las comarcas del "Bages" y "Anoia"):

$$I_x = b \cdot h^3 / 36 = 35'5 \times 25'3^3 / 36 = \mathbf{15.969\ Mm^4} \quad ,$$

y con respecto al mismo eje, se tendrá un módulo resistente territorial de:

$$W_x = b \cdot h^2 / 24 = 35'5 \times 25'3^2 / 24 = \mathbf{946'8\ Mm^3 = 946.800\ Km^3}$$

El momento de inercia con respecto al eje de la base que resulta ser, en este caso, el eje NE-SW de la costa mediterránea, será, como ya se ha visto:

$$I_b = b \cdot h^3 / 12 = 3 \cdot I_x = \mathbf{47.908\ Mm^4}$$

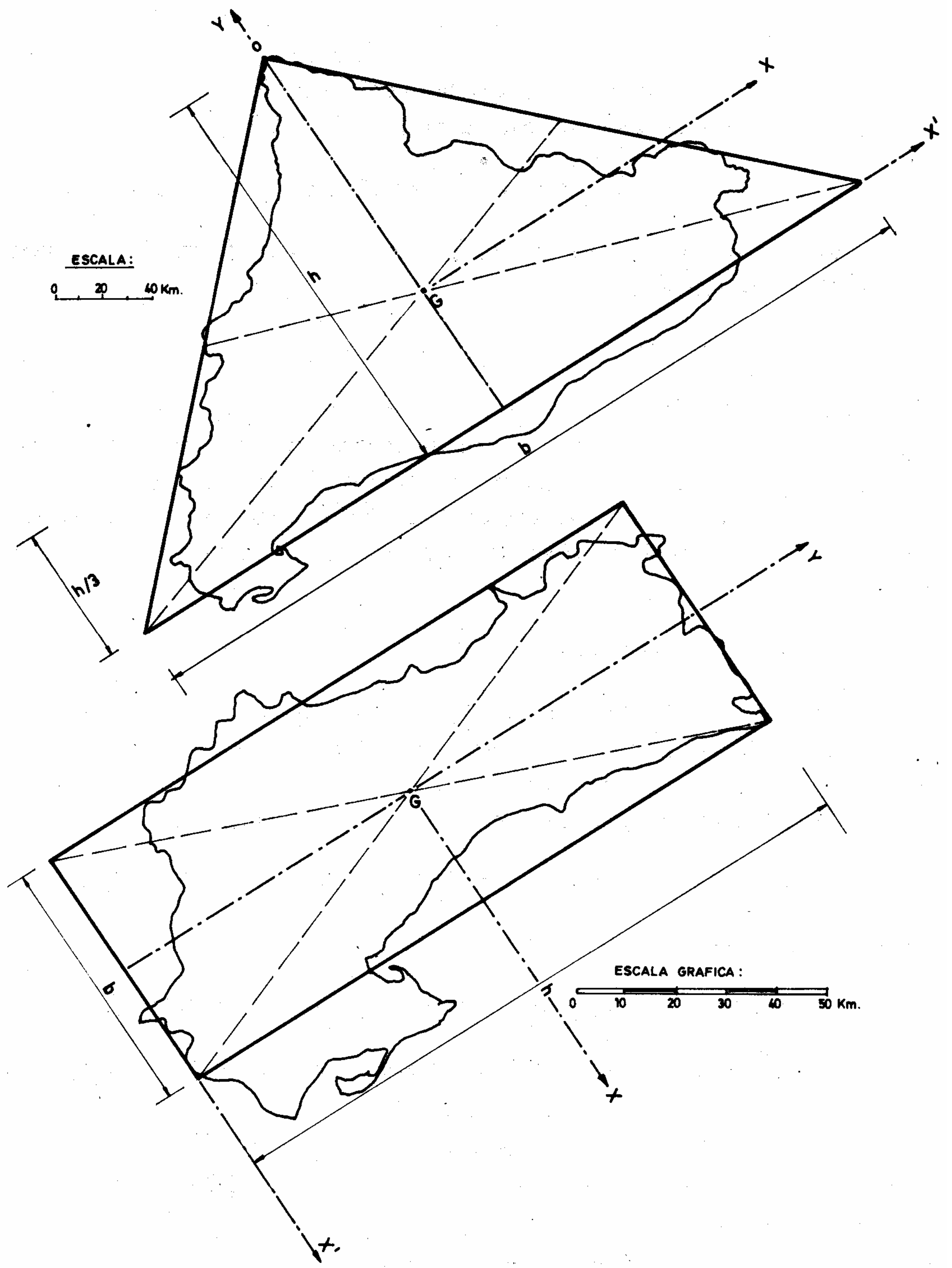


Fig. A-14.13. Momentos territoriales de inercia de Cataluña y de la provincia de Tarragona.

Por último, el momento de inercia con respecto al vértice superior 0 del Principado (que aquí se considera el extremo noroccidental de la comarca de la Vall d'Aran, en los confines del término municipal de Bausén, según el dibujo anexo), vendrá dado por:

$$I_0 = b \cdot h^3 / 4 = 9 \cdot I_x = \mathbf{143.724\ Mm^4}\quad .$$

Obsérvese que en la asimilación geométrica efectuada, el área del territorio catalán será de:

$$A = b \cdot h / 2 = 355 \times 253 / 2 = \mathbf{44.907'5\ Km^2}\quad ,$$

superior en un 40,8% a la superficie real del Principado, que resulta ser exactamente de 31.895,3 Km^2. Al respecto, digamos que en trabajos de este tipo deberá procurarse ajustar al máximo el dibujo del polígono regular sustitutivo a la superficie territorial real en estudio, al objeto de limitar, en la medida de lo posible, la aparición de notorias discrepancias métricas.

b) Caso de la provincia de Tarragona:

Por tratarse de un territorio de planta aproximadamente rectangular, se tendrá un momento de inercia de dicha provincia con respecto al eje **X** que pasa por el centro territorial de masas G (sito sobre la comarca del "Priorat", a escasos kilómetros al sur de la capital Falset):

$$I_x = b \cdot h^3 / 12 = 54 \times 137^3 / 12 = 11.571.088\ Km^4 = \mathbf{1.157'11\ Mm^4}$$

, con un módulo resistente territorial de:

$$W_x = b \cdot h^2 / 6 = 54 \times 137^2 / 6 = 168.921\ Km.^3 = \mathbf{168'9\ Mm^3}\ .$$

El momento de inercia polar, con respecto al centro territorial de masas G, será:

$$I_0 = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)}{12} = \frac{5'4 \times 13'7(5'4^2 + 13'7^2)}{12} = \mathbf{1.336'88\ Mm^4}\quad ,$$

con un módulo resistente territorial correspondiente de:

$$W_0 = \frac{b \cdot h\sqrt{b^2 + h^2}}{6} = \frac{5'4 \times 13'7\sqrt{5'4^2 + 13'7^2}}{6} = \mathbf{181'57\ Mm^4}$$

Así mismo, con respecto al eje **Y**, se tendrá:

$$I_y = h \cdot b^3 / 12 = 13'7 \times 5'4^3 / 12 = \mathbf{179'77\ Mm^4}\quad \mathbf{,}$$

mientras que, con respecto a la base o frontera con el *País Valencià* (eje **X'**), se tendrá un momento de inercia de:

$$I_{X'} = b \cdot h^3 / 3 = 5'4 \times 13'7^3 / 3 = \mathbf{4.628'44\ Mm^4} \quad ,$$

correspondiendo, también, un radio de giro provincial superficial o geométrico, con respecto a dicho eje, de:

$$\rho_{X'} = \sqrt{I_{x'} / A} = \sqrt{4.628'44 / 5'4 \times 13'7} = \mathbf{7'91\ Mm. \ = \ 79'1\ Km.}$$

Las restantes determinaciones a efectuar surgirán de los propios conceptos teóricos anteriormente explicados. De este modo, por ejemplo, el momento territorial estático (superficial o geométrico) de esta provincia con relación al eje-frontera meridional X' con el País Valencià vendrá dado por la expresión:

$$M_{X'} = \int_A y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot [\, y^2 / 2 \,]_0^h = b \cdot h^2 / 2 =$$

$$= 5'4 \cdot 13'7^2 / 2 = \mathbf{506'76\ Mm^3 = 506.763\ Km^3}\ .$$

d) Tablas simplificadas de cálculo:

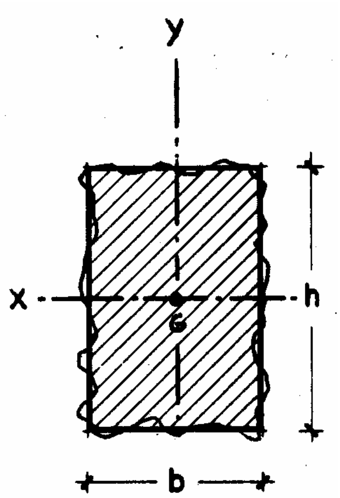


Fig. A-14.14. Territorio de planta aproximadamente rectangular.

$$I_X = b \cdot h^3 / 12 \qquad ; \qquad I_y = h \cdot b^3 / 12$$

En este caso, para entrar en la tabla siguiente, deben tomarse los valores de **b** por **h**, y recíprocamente. Esto es:

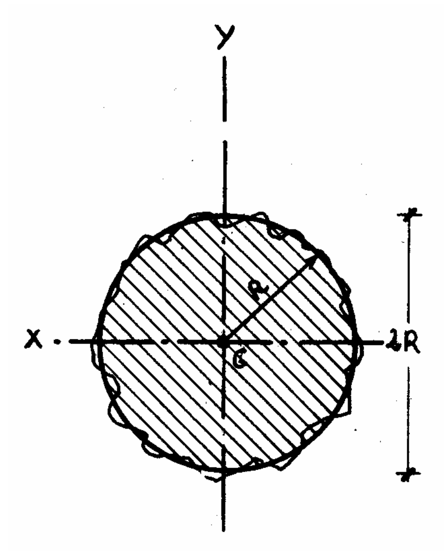
b (km)	*h* en km									
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
10	833	2 812	6 666	13 020	22 500	35 729	53 333	75 937	104 166	138 646
15	1 250	4 219	10 000	19 531	33 750	53 595	80 000	113 906	156 250	207 969
20	1 667	5 625	13 333	26 041	45 000	71 458	106 666	151 875	208 333	277 292
25	2 083	7 031	16 667	32 552	56 250	89 323	133 333	189 844	260 417	346 614
30	2 500	8 437	20 000	39 062	67 500	107 187	160 000	227 812	312 500	415 937
35	2 917	9 844	23 333	45 573	78 750	125 052	186 667	265 781	364 583	485 260
40	3 333	11 250	26 666	52 082	90 000	142 916	213 333	303 750	416 666	554 583
45	3 750	12 656	30 000	58 594	101 250	160 781	240 000	341 719	468 750	623 906
50	4 167	14 062	33 333	65 104	112 500	178 646	266 667	379 687	520 833	693 229
55	4 583	15 468	36 667	71 614	123 750	196 511	293 333	417 656	572 917	762 552
60	5 000	16 875	40 000	78 125	135 000	214 375	320 000	455 625	625 000	831 875
65	5 417	18 281	43 333	84 635	146 250	232 240	346 667	493 593	677 083	901 198
70	5 833	19 687	46 667	91 146	157 500	250 104	373 333	531 562	729 167	970 520
75	6 250	21 094	50 000	97 656	168 750	267 969	400 000	569 531	781 250	1 039 843
80	6 666	22 500	53 333	104 168	180 000	285 833	426 667	607 500	833 333	1 109 166
85	7 083	23 906	56 667	110 667	191 250	303 698	453 333	645 469	885 416	1 178 489
90	7 500	25 312	60 000	117 187	202 500	321 562	480 000	683 437	937 500	1 247 812
95	7 917	26 718	63 333	123 698	213 750	339 427	506 667	721 406	989 583	1 317 135
100	8 333	28 125	66 666	130 208	225 000	357 292	533 333	759 375	1 041 667	1 386 458

Tabla A-14.1. Momentos de inercia de territorios aproximadamente rectangulares (km^4)

h en Km								*b*
60	65	70	75	80	85	90	100	(Km)
180 000	228 854	285 833	351 562	426 667	511 771	607 500	833 333	10
270 000	343 281	428 750	527 343	640 000	767 565	911 250	1 250 000	15
360 000	457 708	571 667	703 125	853 333	1 023 542	1 215 000	1 666 666	20
450 000	572 135	714 583	878 906	1 066 667	1 279 427	1 518 750	2 083 333	25
540 000	686 563	857 500	1 054 687	1 280 000	1 535 312	1 822 500	2 500 000	30
630 000	800 990	1 000 416	1 230 468	1 493 333	1 791 198	2 126 250	2 916 667	35
720 000	915 417	1 143 333	1 406 250	1 706 667	2 047 083	2 430 000	3 333 333	40
810 000	1 029 844	1 286 250	1 528 031	1 920 000	2 302 969	2 733 750	3 750 000	45
900 000	1 144 271	1 429 167	1 757 812	2 133 333	2 558 854	3 037 500	4 166 667	50
990 000	1 258 698	1 572 083	1 933 533	2 346 667	2 814 739	3 341 250	4 583 333	55
1 080 000	1 373 125	1 715 000	2 109 375	2 560 000	3 070 625	3 645 000	5 000 000	60
1 170 000	1 487 552	1 857 917	2 285 156	2 773 333	3 326 510	3 948 750	5 416 667	65
1 260 000	1 601 979	2 000 833	2 460 937	2 986 666	3 582 396	4 252 500	5 833 333	70
1 350 000	1 716 406	2 143 750	2 636 719	3 200 000	3 838 281	4 556 250	6 250 000	75
1 440 000	1 830 834	2 286 667	2 812 500	3 413 333	4 094 167	4 860 000	6 666 667	80
1 530 000	1 945 261	2 429 583	2 988 285	3 626 667	4 350 052	5 163 750	7 083 333	85
1 620 000	2 059 688	2 572 500	3 164 062	3 840 000	4 605 937	5 467 500	7 500 000	90
1 710 000	2 174 115	2 715 416	3 339 844	4 052 222	4 861 823	5 771 250	7 916 667	95
1 800 000	2 288 542	2 858 333	3 515 625	4 266 667	5 117 708	6 075 000	8 333 333	100

Tabla A-14.1'(Continuación). Momentos de inercia de territorios aproximadamente rectangulares (km^4)

En el caso de un territorio de configuración planimétrica aproximadamente circular, se tendría la siguiente tabla simplificativa de los cálculos a efectuar:



$$I_x = \pi \cdot R^4 / 4 = I_y$$

Fig. A-14.15. Territorio de planta aproximadamente circular.

2 R	$I_x = I_Y$	2 R	$I_x = I_Y$	2 R	$I_x = I_Y$	2 R	$I_x = I_Y$
20	7 854	40	125 664	60	636 172	80	2 010 619
21	9 547	41	138 709	61	679 651	81	2 113 051
22	11 499	42	152 745	62	725 332	82	2 219 347
23	13 737	43	167 820	63	773 272	83	2 329 605
34	16 286	44	183 984	64	823 550	84	2 443 920
25	19 175	45	201 289	65	876 240	85	2 562 392
26	22 432	46	219 787	66	931 420	86	2 685 120
27	26 087	47	239 531	67	989 166	87	2 812 205
28	30 172	48	260 576	68	1 049 556	88	2 943 748
29	34 719	49	282 979	69	1 112 660	89	3 079 853
30	39 761	50	306 796	70	1 178 588	90	3 220 623
31	45 333	51	332 086	71	1 247 393	91	3 366 165
32	51 472	52	358 908	72	1 319 167	92	3 516 586
33	58 214	53	387 323	73	1 393 995	93	3 671 992
34	65 597	54	417 393	74	1 471 963	94	3 832 492
35	73 662	55	449 180	75	1 553 156	95	3 998 198
36	82 448	56	482 750	76	1 637 662	96	4 169 220
37	91 998	57	518 166	77	1 725 571	97	4 345 671
38	102 354	58	555 497	78	1 816 972	98	4 527 664
39	113 561	59	594 810	79	1 911 967	99	4 715 315

Tabla A-14.2. Momentos de inercia de territorios aproximadamente circulares.

e) Territorio de forma triangular:

Fundamentalmente, como ya se ha visto con anterioridad, nos encontraremos en este caso al tratar de estudiar la asignación o afectación global de los triángulos intercomarcales o interregionales a su territorio de pertenencia (ver el apartado 7 del anterior Capítulo 7, así como el apartado 1 del Anexo 13).

De una manera simplificada, se tendrá una configuración planimétrica del tipo:

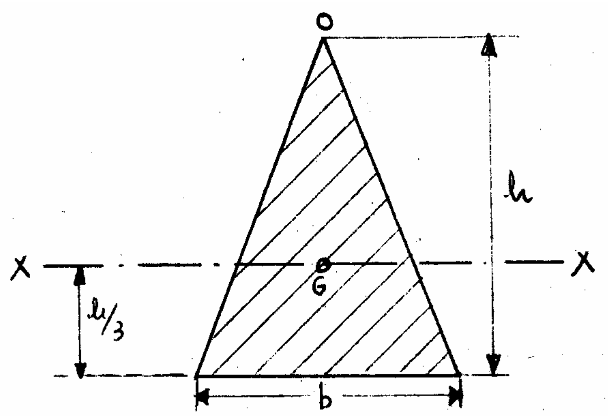


Fig. A-14.16. Territorio aproximadamente triangular.

El momento ecuatorial de inercia con respecto al eje **X-X'**, que pasa por el centro territorial de masas, viene dado por la expresión:

$$I_x = b \cdot h^3 / 36 .$$

Por aplicación del teorema de Steiner, que estudiaremos seguidamente, se tendrá que el momento de inercia del territorio triangular con respecto al eje de su base, será:

$$I_b = b \cdot h^3 / 36 + b \cdot h / 2 \cdot (h / 3)^2 = b \cdot h^3 / 12$$

Del mismo modo, el momento de inercia de dicho territorio respecto a su vértice superior O, será:

$$I_0 = b \cdot h^3 / 36 + b \cdot h / 2 \cdot (2h / 3)^2 = b \cdot h^3 / 4 ,$$

y así procederemos sucesivamente para la determinación de los restantes momentos territoriales de inercia respecto de los demás vértices o ejes territoriales.

Por último, veamos que el módulo resistente territorial con respecto al mismo eje **X-X'**, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$W_x = I_x / d_{máx.} = (b \cdot h^3 / 36) : (2h / 3) = b \cdot h^2 / 24$$

f) Territorio de forma irregular:

Será el caso general o normal que nos encontraremos en los estudios de Ordenación Territorial. Para su eficaz resolución, podemos suponer concentrada toda el área (o la masa de renta) del territorio en su centro de gravedad conocido, bien por tratarse del centro urbano de su capitalidad territorial o sede institucional, bien por haberse determinado por los procedimientos indicados en el ejemplo desarrollado para Cataluña.

Para ello, se divide la superficie del territorio (dibujada a escala sobre un plano o mapa del mismo) mediante rectas paralelas al eje con respecto al cual se pretende determinar el momento territorial de inercia. Ello debe realizarse en **k** fajas suficientemente estrechas como para que puedan considerarse, a efectos prácticos, como rectángulos yuxtapuestos; del dibujo se deducen las áreas f_i de dichas fajas, así como las distancias y_i de sus centros de gravedad al eje territorial **e**, disponiéndose el cálculo subsiguiente en forma tabular y formándose la suma:

$$I_e = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \cdot f_i$$

Para que este método resulte operativo y no origine un error de medición apreciable, es preciso que las franjas de territorio sean tan estrechas que el momento de inercia de cada una de ellas, con respecto a la paralela al eje que pasa por su propio centro de gravedad, esto es:

$$b \cdot h^3 / 12 = f \cdot h^2 / 12$$

sea despreciable en comparación con el producto: $y^2 \cdot f$.

Si hay una proporción importante del territorio -o varias- de la cual puedan determinarse fácilmente: el área **f**, la ordenada $\mathbf{y_S}$ del centro de gravedad y el momento de inercia $\mathbf{I_S}$ (con respecto a la paralela al eje que pasa por su centro de gravedad o de masas), no habrá que dividir dicha porción territorial en fajas paralelas, pero en la adición total, en vez del producto: $y^2 \cdot f$, deberá considerarse la expresión: $y_S^2 \cdot f + \mathbf{I_S}$, que resulta como consecuencia de la aplicación, a este caso, del teorema de Steiner, que veremos en el siguiente epígrafe de nuestro estudio.

Así mismo, si se tiene un territorio cuyo centro de masas de renta G no nos es conocido todavía, y hay que determinar su momento territorial de inercia con respecto a un eje paralelo a una dirección dada (por ejemplo: una vía importante de comunicación terrestre) y que pase por dicho punto G, se empezará por calcular, como se sabe, el momento de inercia para una paralela cualquiera al eje, y luego se reduce dicho momento al eje que pasa por G restándole el producto:

$$F \cdot y_S^2 \quad \text{, siendo:}$$

$$\begin{cases} F = \text{superficie total del territorio (Km}^2\text{).} \\ y_S = \text{distancia del centro territorial de masas de renta al eje provisional (km).} \end{cases}$$

5. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA CON RELACIÓN A EJES PARALELOS

Determinaremos dichos momentos de inercia por aplicación de los teoremas y fórmulas de Steiner, de gran utilidad en la Mecánica Física (PÉREZ, 1976), puesto que estos casos también pueden presentarse, con cierta frecuencia, en los estudios de Ordenación Territorial. Ello nos permitirá calcular los momentos territoriales de inercia áxicos o ecuatoriales $\mathbf{I_X}$ e $\mathbf{I_y}$', el momento territorial de inercia polar $\mathbf{I_0}$ y el momento centrífugo $\mathbf{I_{xy}}$', respecto a los ejes de un sistema coordenado rectangular, en función de los momentos I_ξ, I_η e $I_{\xi\eta}$ respecto a otros ejes paralelos a los anteriores con origen en el centro de masas G del territorio A:

a) Momentos de inercia relativos a ejes paralelos:

Sean *a* y *b* las coordenadas del centro de masas G del territorio A respecto al sistema de coordenadas cartesianas rectangulares OXY, y r = $\overline{OG}$.

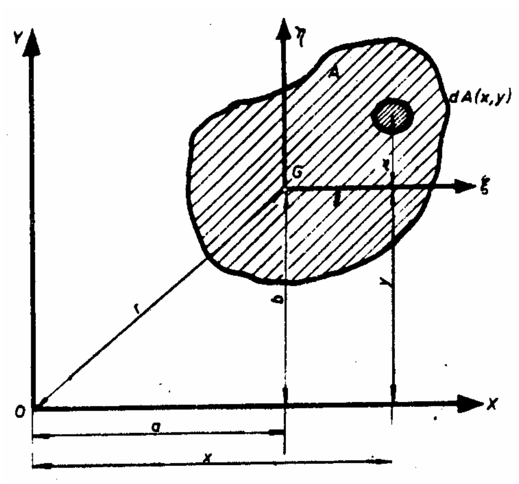


Fig. A-14.17. Momento de inercia relativo a ejes paralelos.

Las coordenadas del elemento infinitesimal de superficie dA son:

$$x = a + \xi \qquad e \qquad y = b + \eta \ ,$$

siendo ξ y η las coordenadas del elemento respecto al sistema G ξ η que contiene al centro de masas del territorio estudiado.

Por definición, el momento de inercia del territorio respecto al eje **Ox** viene dado por:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A (b + \eta)^2 \cdot dA = \int_A b^2 \cdot dA + \int_A \eta^2 \cdot dA +$$

$$+ \int_A 2b \cdot \eta \cdot dA = b^2 \int_A dA + \int_A \eta^2 \cdot dA + 2b \int_A \eta \cdot dA =$$

$$= b^2 \cdot A + I_\xi = I_x$$

al ser: $\int_A dA = A$ el área total del territorio, $\int_A \eta^2 \cdot dA = I_\xi$ el momento de inercia respecto al eje Gη, y: $\int_A \eta \cdot dA = 0$, por ser el momento estático de la superficie del territorio respecto al eje Gη que contiene su centro de gravedad (ver epígrafe 1 de este mismo Capítulo).

Del mismo modo, con respecto al eje **Oy**, se cumplirá que:

$$I_y = I_\eta + a^2 \cdot A = I_\eta + a^2 \cdot m$$

, para los casos superficial o ponderal, respectivamente.

Estas fórmulas dan origen al que podríamos denominar “teorema del eje paralelo territorial”, a saber:

El momento de inercia de un territorio respecto a un eje fijo cualquiera que no pase por su centro de masas es igual al momento de inercia respecto a otro eje paralelo a él que pasa por su centro de masas más el producto del área (o de la masa de renta, población, ...), por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

De todo lo expuesto también se deduce que *el radio medio o de giro respecto de un eje territorial cualquiera vendrá dado por la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son, respectivamente, el radio de giro del eje paralelo que pasa por el centro territorial de las masas socioeconómicas y la distancia geográfica entre ambos ejes.*

b) Momento de inercia polar:

Sumando miembro a miembro las expresiones anteriores, obtenemos:

$$I_O = I_X + I_y = I_\xi + I_\eta + (a^2 + b^2)\,A = I_G + r^2 \cdot A$$

que puede traducirse en el siguiente teorema:

El momento de inercia polar de un territorio respecto a un polo O es igual al momento de inercia polar respecto a su centro de gravedad más el producto de su área por el cuadrado de la distancia existente entre O y G.

El centro territorial de masas queda, pues, caracterizado por la circunstancia de que, para él, el momento de inercia polar del territorio es un mínimo (FRANQUET, 1990/91).

Existe también una relación de correspondencia entre los radios de giro de un territorio con respecto a los ejes paralelos, uno de los cuales pasa por el centro territorial de masas. Así,

$$\rho_X{}^2 = \rho_\xi{}^2 + b^2$$

$$\rho_y{}^2 = \rho_\eta{}^2 + a^2 \qquad \text{ó bien: } \rho_0{}^2 = \rho_G{}^2 + r^2$$

c) Momento de inercia compuesto:

El "momento centrífugo del territorio" respecto a los ejes OX y OY es:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \int_A (\xi + a) \cdot (\eta + b) \cdot dA =$$

$$= \int_A \eta \cdot \xi \cdot dA + a \cdot \int_A \eta \cdot dA + b \int_A \xi \cdot dA + a \cdot b \int_A dA$$

$$,\ \text{y:} \qquad I_{xy} = I_{\xi\eta} + a \cdot b \cdot A$$

Si los ejes Oξ y Oη son principales de inercia (ejes de simetría), se tendrá que:

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi \cdot \eta \cdot dA = 0\ , \qquad \text{luego: } \mathbf{I_{xy}} = a \cdot b \cdot A$$

6. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA CON RELACIÓN A EJES CONCURRENTES GIRATORIOS

Vamos ahora a relacionar los momentos territoriales de inercia respecto de ejes concurrentes que forman cierto ángulo con los ejes iniciales de referencia, por aplicación del conocido Teorema de Poinsot[1].

Sean I_x e I_y los momentos de inercia de un territorio A respecto a los ejes rectangulares OX y OY, e I_{xy} su momento centrífugo respecto a los mismos ejes.

Calculemos ahora el momento de inercia I_u del territorio respecto a otro eje Ou que está definido por el ángulo α que forma con el eje OX en función de I_x, I_y e I_{xy}.

Como resulta que: $u = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \operatorname{sen} \alpha$

$$v = \overline{CM} = \overline{CN} - \overline{NM} = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

y sustituyendo estos valores, obtenemos:

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A y^2 \cdot dA + \operatorname{sen}^2 \alpha \int_A x^2 \cdot dA - 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \int_A x \cdot y \cdot dA$$

De donde se deduce que:

$$I_u = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - I_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

(realizaremos idénticas consideraciones para los momentos territoriales ponderales o másicos)

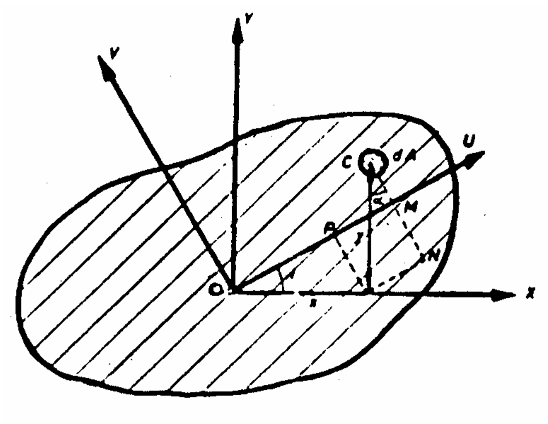


Fig. A-14.18. Momento de inercia relativo a ejes concurrentes giratorios.

Análogamente, con respecto al otro eje Ov, se tendrá que:

[1] Podemos también determinar el momento de inercia territorial con respecto a un eje comunicativo cualquiera en función de los momentos de inercia con respecto a tres ejes de referencia dados. La expresión que se obtiene se conoce, en la dinámica del sólido rígido, como Teorema de Poinsot.

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA = I_x \cdot \text{sen}^2\,\alpha + I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{xy} \cdot \text{sen}\,2\alpha$$

y de igual forma, el valor del producto de inercia o momento territorial centrífugo, será:

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

Si sumamos las dos igualdades anteriores, se verifica:

$I_x + I_y = I_u + I_v$ enunciándose, consecuentemente, que *"el momento de inercia polar es invariante en toda rotación de los ejes".* Ello nos permitirá, en fin, el conocimiento del momento de inercia del territorio al girar alrededor de cualesquiera de los infinitos ejes que pasan por su centro de masas (PÉREZ, 1976).

7. EJES TERRITORIALES PRINCIPALES DE INERCIA

Reciben el nombre de "ejes principales de inercia" de un cierto territorio, dos direcciones $O\xi$ y $O\eta$, perpendiculares o normales entre sí, respecto a las cuales los momentos de inercia del territorio son máximo y mínimo, respectivamente (correspondiendo a la atracción económica mínima y máxima en relación a dichos ejes territoriales, como tendremos ocasión de desarrollar posteriormente).

Para determinarlos, bastará con hallar los valores de α que hagan máximo o mínimo al momento de inercia I_u lo cual se consigue despejando α de la ecuación que resulte al igualar a cero la derivada de I_u respecto a la variable independiente α; es decir (condición necesaria o de primer grado):

$$d\,I_u / d\,\alpha = -2\,I_x \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + 2\,I_y \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

Por relaciones trigonométricas, se tiene que:

$- I_x \cdot \text{sen}\,2\alpha + I_y \cdot \text{sen}\,2\alpha = 2\,I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$; sacando factor común:

$\text{sen}\,2\alpha\,(I_y - I_x) = 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$, de dónde:

$$\text{tag}\,2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \quad .$$

Esta ecuación suministra dos valores para α: α_0 y $\alpha_0 + 90^o$, que definen dos direcciones perpendiculares entre sí, denominados *ejes principales de inercia;* de los cuales uno hace máximo a I_u y el otro lo hace mínimo (como puede comprobarse en el cálculo de la condición suficiente o de 2º grado).

La misma relación se obtiene si igualamos a cero la derivada de I_V con relación a α; es decir, $d\, I_V / d\, \alpha = 0$.

Los momentos correspondientes a estas direcciones se denominan *momentos principales* y los designaremos por I_ξ e I_η.

Si hubiéramos elegido como ejes coordenados los principales de inercia $O\xi$ y $O\eta$, el primer miembro de la ecuación anterior sería nulo, lo cual exige que el numerador del segundo miembro $I_{\xi\eta}$ debe ser también nulo (PÉREZ, 1976).

Los ejes principales de inercia están pues caracterizados por la propiedad de ser el momento centrífugo respecto a ellos nulo ($I_{\xi\eta} = 0$), siendo además perpendiculares entre sí.

Así, si un territorio tiene un eje de simetría, éste y su perpendicular son principales de inercia, pues el momento centrífugo respecto a ellos es nulo.

8. MOMENTOS TERRITORIALES PRINCIPALES DE INERCIA

Calculemos ahora los momentos principales de inercia I_ξ e I_η en función de I_x, I_y e I_{xy}, en el caso de un territorio cualquiera.

Según las fórmulas anteriores, si en lugar de dos ejes genéricos *x* e *y*, se toman como referencia los ejes principales $O\xi$ y $O\eta$, e indicando con OX y OY los ejes móviles, las ecuaciones anteriores se transforman, teniendo en cuenta que $I_{\xi\eta} = 0$, en las siguientes (PÉREZ, 1976):

$$\begin{cases} I_x = I_\xi \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_\eta \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \\ I_y = I_\xi \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + I_\eta \cdot \cos^2 \alpha_0 \\ I_{xy} = \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \operatorname{sen} 2\alpha_0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{cases} I_x + I_y = I_\xi + I_\eta \\ I_y - I_x = (I_\eta - I_\xi) \cdot \cos 2\alpha_0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, resueltas, teniendo en cuenta al simplificar las expresiones trigonométricas:

$$\text{sen}^2\,\alpha_0 = \frac{1-\cos\,2\alpha_0}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2\,\alpha_0 = \frac{1+\cos\,2\alpha_0}{2} \quad \text{dan:}$$

$$\begin{cases} I_\xi = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2}\ \sec 2\alpha_0 \\[2ex] I_\eta = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2}\ \sec 2\alpha_0 \end{cases}$$

Ahora bien, como: $\sec 2\alpha_0 = \sqrt{1+\text{tag}^2\,2\alpha_0} = \sqrt{1+\left(\dfrac{I_{xy}}{I_x - I_y/2}\right)^2}$

valor que substituido en las ecuaciones anteriores, las transforman en:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_\xi = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \text{, y también} \\[3ex] I_\eta = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{array}}$$

fórmulas que nos determinan los momentos de inercia principales máximo y mínimo, respectivamente, para el territorio en cuestión.

9. TRAZADO GRÁFICO: CÍRCULO DE MOHR-LAND

El trazado del círculo de inercia de Mohr-Land[2], de gran utilidad en la Mecánica Física, facilita otrosí la resolución numérica de los problemas sobre los momentos de inercia territoriales.

Las ecuaciones anteriores transformadas en (PÉREZ, 1976),

[2] Círculo de Mohr: Lugar geométrico de los extremos del vector tensión referido a sus componentes normal y tangencial, que actúan sobre los planos paralelos a una dirección principal. Referido a sus componentes cartesianas, el vector tensión describiría una elipse principal del elipsoide de tensiones.

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{I_\xi + I_\eta}{2} + \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_y = \dfrac{I_\xi + I_\eta}{2} - \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_{xy} = \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha_0 \end{cases}$$

nos sugieren una sencilla representación gráfica por el modo de variar I_x, I_y e I_{xy} al variar el ángulo α_0 que forma el eje OX con el eje Oξ, ya que si se consideran I_x e I_y como abscisas e I_{xy} como ordenada de un punto en un plano, las ecuaciones últimas son las ecuaciones paramétricas de un círculo cuyo centro C está sobre el eje de abscisas a una distancia:

$\dfrac{I_\xi + I_\eta}{2}$ del origen O, y cuyo radio es igual a: $\dfrac{I_\xi - I_\eta}{2}$.

Efectivamente, trazando este círculo y la recta CM que forma el ángulo $2\alpha_0$, con el eje de abscisas, la ordenada y la abscisa del punto M satisface a las ecuaciones anteriores.

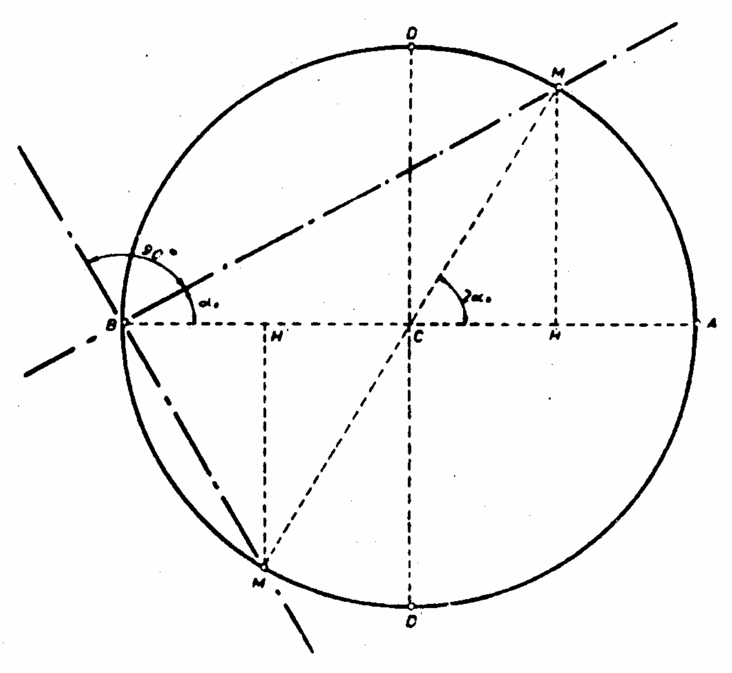


Fig. A-14.19. Círculo territorial de Mohr-Land.

El ángulo α_0 caracteriza las direcciones principales; entonces tomamos: $I_\xi = I_{máx.}$ e $I_\eta = I_{min}$, transformándose las expresiones mencionadas en las siguientes:

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{I_{máx} + I_{min}}{2} + \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_y = \dfrac{I_{máx} + I_{min}}{2} - \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_{xy} = \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha_0 \end{cases}$$

Para α_0 = 0º y α_0 = 90º (π/2 radianes) se obtienen los puntos A y B, para los que la abscisa se hace máxima y mínima, respectivamente, e igual a:

$\overline{OA} = I_\xi = I_{máx}$ y $\overline{OB} = I_\eta = I_{min}$, mientras que la ordenada, o sea $I_{\xi\eta}$, se anula.

Para el caso particular α_0 = 45º (π/4 radianes) o α_0 = 135º (3π/4 radianes) se obtienen los puntos D y D', para los cuales la ordenada correspondiente, o sea I_{xy}, es máxima e igual a:

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \quad \text{, mientras que:} \quad I_x = I_y = \frac{I_\xi + I_\eta}{2}$$

Problema inverso:

Como en las aplicaciones territoriales puede ser interesante determinar los momentos principales I_ξ e I_η, así como las direcciones principales en función de los momentos I_x, I_y e I_{xy} respecto a los ejes ortogonales X e Y, veremos, a continuación, la construcción inversa.

Dados u obtenidos I_x e I_y, se toman sobre un eje orientado: $\overline{OH} = I_x$ y $\overline{OH'} = I_y$. A partir de H y perpendicularmente llevamos $\overline{HM} = I_{xy}$. Tomando como centro C (punto medio del segmento $\overline{HH'}$) y radio $\overline{CM}$ trazamos el círculo que cortará al eje orientado en los puntos A y B, tal que:

$$I_{máx} = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = \overline{OC} + \overline{CM} = \frac{\overline{OH} + \overline{OH'}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{OH} - \overline{OH'}}{2}\right)^2 + \overline{HM}^2} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Como α_0 es el ángulo que forma con una de las direcciones principales, éstas quedan perfectamente definidas con las rectas perpendiculares $\overline{BM}$ y $\overline{BM}'$ (*direcciones principales).*

Veamos, por último, que el momento de inercia axial para un eje de gravedad es un mínimo entre todos los momentos territoriales de inercia para ejes paralelos. Si I_1 y I_2 son dos momentos de inercia de los territorios de masas de renta respectivas m_1 y m_2, referidos a dos ejes de gravedad paralelos, el momento de inercia del territorio formado por ambos con respecto a su eje de gravedad paralelo, será:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + e^2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}} \quad ,$$

en donde **e** es la distancia entre los ejes de gravedad paralelos de las dos masas de renta de ambos territorios.

10. EL TENSOR TERRITORIAL DE INERCIA

Generalizando las teorías expuestas al espacio tridimensional, veamos cómo los momentos territoriales de inercia respecto de todos los ejes que pasan por un punto cualquiera del territorio, quedarán sencillamente relacionados por una ecuación del tipo:

$$I = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot I_{xy} -$$

$$- 2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot I_{xz} - 2 \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot I_{yz}$$

donde I_x, I_y e I_z representan los momentos de inercia territoriales respecto de los tres ejes coordenados, mientras I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} serán los productos territoriales binarios de inercia respecto de los pares de planos coordenados.

Ello indica que las nueve componentes o elementos de la matriz cuadrada simétrica o "matriz de inercia" siguiente:

$$[I] = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$$

bastan para definir el momento territorial de inercia respecto de un eje cualquiera que pasa por el punto o lugar geográfico en cuestión. Nos hallamos en presencia, pues, del **tensor territorial de inercia,** que viene a completar o a sustituir el concepto de “momento de inercia territorial” que hemos introducido anteriormente.

Por otra parte, si se elige el origen de coordenadas justamente en el centro territorial de masas, de tal forma que los tres ejes coordenados ocupen los tres ejes de simetría del territorio en estudio (considerado como un sólido de masa económica **m**), resultará que los productos territoriales de inercia (momentos centrífugos) se anularán, puesto que las masas económicas se hallan uniformemente distribuidas alrededor de dicho centro. De este modo, el tensor inercial territorial quedará diagonalizado, así:

$$[I] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}$$

, cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios, autovalores o raíces características o latentes de la expresada matriz de inercia.

Los momentos principales territoriales de inercia, en definitiva, lo son alrededor de los ejes territoriales que cumplirán las siguientes condiciones:

- ser perpendiculares entre sí.
- tener el origen en el centro territorial de masas de renta.
- tener distribuida la masa económica, alrededor de ellos, de un modo regular y simétrico.

Desde luego, en la práctica del Análisis Territorial, se trabajará normalmente en un espacio bidimensional, con lo que el tensor inercial territorial será, simplemente, una matriz cuadrada de dimensiones 2 x 2.

La aplicación al Análisis Territorial que acabamos de exponer, ofrece una idea de la génesis física del concepto de "tensor". Desde el punto de vista estrictamente matemático, el tensor es un ente abstracto formado por nueve componentes (en el espacio afín euclídeo E_3), pero desde el punto de vista físico o económico, el tensor aparece como un conjunto de infinitos vectores concurrentes (tensiones físicas o económicas), relacionados de tal modo que es posible expresarlos todos **linealmente** en función de tres de ellos. Trátase, en definitiva, de una **función vectorial lineal**, de coeficientes cosenos directores. En el caso de los tensores de segundo orden, como los que aquí hemos presentado, se trata de un **trinomio vectorial lineal,** pudiéndose generalizar el concepto a matrices de mayor número de elementos.

Si imaginamos, ahora, la "deformación" de un territorio producida por efecto de un conjunto de fuerzas económicas exteriores al mismo (ver posterior epígrafe 13.3.2), podrán engendrarse en su seno esfuerzos elásticos que tienden a equilibrar dichas fuerzas. Pues bien, en el tensor territorial resultante, la transformación que le caracteriza matemáticamente como tal resultará exclusivamente como consecuencia de una relación vectorial lineal, al margen de la significación económica de los vectores. De hecho, siempre que un fenómeno de actuación o influencia económica sobre un territorio venga definido por una radiación de vectores relacionados linealmente en un sistema ortogonal, podremos representar matemáticamente el susodicho fenómeno por medio de un tensor (PUIG, 1970).

11. ELIPSES TERRITORIALES DE INERCIA

Determinaremos, ahora, el momento de inercia de un territorio A respecto a cierto eje OL que pasa por un punto o polo O tomado como origen de coordenadas. Sea φ el ángulo formado por la recta OL con la dirección positiva del eje de abscisas OX (ver fig. A-14.20).

La ecuación normal de la recta OL, es (PUIG, 1970):

$$x \cdot \text{sen}\ \varphi - y \cdot \cos \varphi = 0\ .$$

La distancia **r** de un punto cualquiera M (x,y) a esta recta es igual a:

$$r = | x \cdot \text{sen}\ \varphi - y \cdot \cos \varphi |\ .$$

El momento de inercia I_e del territorio A en relación a la recta OL, según las definiciones que ya hemos dado, se expresará mediante la integral doble (caso superficial o geométrico):

$$I_e = \iint_A r^2 \cdot dx \cdot dy = \iint_A (x \cdot \text{sen}\ \varphi - y \cdot \cos \varphi)^2\, dx \cdot dy =$$

$$= \text{sen}^2 \varphi \cdot \iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy - 2 \,\text{sen}\, \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \iint_A xy \cdot dx \cdot dy +$$

$$+ \cos^2 \varphi \cdot \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = I_y \cdot \text{sen}^2 \varphi - 2\, I_{xy} \cdot \text{sen}\, \varphi \cdot \cos \varphi + I_x \cdot \cos^2 \varphi =$$

$$= I_x + (I_y - I_x) \cdot \text{sen}^2 \varphi - I_{xy} \cdot \text{sen}\, 2\varphi \quad . \qquad (1)$$

Dividiendo todos los términos de esta ecuación por I_e, obtendremos:

$$I = I_x \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I_e}} \right)^2 - 2 \cdot I_{xy} \left(\frac{\text{sen}\, \varphi}{\sqrt{I_e}} \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I_e}} \right) + I_y \left(\frac{\text{sen}\, \varphi}{\sqrt{I_e}} \right)^2 \qquad (2)$$

Tomemos, ahora, en la recta OL un cierto punto N(X,Y), tal que se cumpla que:

$$\overline{ON} = 1 / \sqrt{I_e}$$

Distintos valores de I_e y diferentes puntos N corresponden a varias direcciones del eje OL, es decir, a diferentes valores del ángulo φ. Hallemos el lugar geométrico o geográfico de los puntos N del territorio en estudio. Es evidente que:

$$X = \frac{1}{\sqrt{I_e}} \cos \varphi \qquad , \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I_e}} \text{sen}\, \varphi \quad .$$

En virtud de la igualdad (2), las magnitudes X e Y se hallan ligadas entre sí por la relación:

$$1 = I_x \cdot X^2 - 2\, I_{xy} \cdot XY + I_y \cdot Y^2 \qquad (3)$$

De este modo, el lugar geométrico de los puntos N (X,Y) es la forma cuadrática igualada a cero o curva de segundo grado u orden representada mediante la expresión anterior.

Para proceder a la demostración de que dicha curva es una cónica del género elipse, partiremos de la denominada "desigualdad de Buniakovski-Schwarz", a saber:

$$\iint_A [f\,(x,y) - \lambda \cdot \varphi\,(x,y)]^2 \cdot dx \cdot dy > 0 \quad ,$$

donde λ es una constante. El signo de igualdad puede tener lugar sólo en el caso en que:

$$f(x,y) - \lambda \cdot \varphi(x,y) \equiv 0 \text{ , es decir, cuando:}$$

$$f(x,y) = \lambda \cdot \varphi(x,y) \quad .$$

Si suponemos que:

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \text{cte.} = \lambda \ ,$$

siempre tendrá lugar el signo de desigualdad. De este modo, abriendo los paréntesis bajo el signo de integral, obtendremos:

$$\iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy - 2\lambda \iint_A f(x,y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy + \lambda^2 \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy > 0$$

Analicemos, ahora, la expresión del primer miembro como una función de λ. Se trata de un polinomio de segundo grado que jamás se anula. Por tanto, sus raíces son números complejos, lo que puede tener lugar sólo en el caso de que el discriminante formado por los coeficientes del polinomio cuadrático sea negativo, es decir:

$$[(\iint_A f(x.y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy)^2 - \iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \cdot \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy] < 0 \text{ , o bien:}$$

$$(\iint_A f(x,y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy)^2 < \iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \cdot \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \ ,$$

que constituye la mencionada desigualdad de Buniakovski-Schwarz (**), cuya mayor especificación conceptual puede verse al final del presente capítulo de nuestra tesis.

En nuestro caso, se cumple que:

$$f(x,y) = x \quad ; \quad \varphi(x,y) = y \quad ; \quad x / y = \text{cte.} \quad ,$$

por lo que se tendrá que:

$$(\iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy)^2 < (\iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy) \cdot (\iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy) \text{ , o bien:}$$

$$I_x \cdot I_y - I_{xy}{}^2 > 0$$

Al respecto, debe considerarse que el discriminante de la cónica representada en la ecuación (3), a saber:

$$g = I_x \cdot X^2 - 2\, I_{xy} \cdot X \cdot Y + I_y \cdot Y^2 - 1 = 0 \quad ,$$

vendrá dado por el determinante simétrico de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - I_x \cdot I_y + I_{xy}^2 < 0 \ ,$$

luego se trata de una cónica no degenerada del género elipse.

Como también:

$$I_x \cdot (I_{xy}^2 - I_x \cdot I_y) = I_x \cdot I_{xy}^2 - I_x^2 \cdot I_y \ < \ 0 \quad ,$$

se trata de una elipse real, cuyo centro viene dado por las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\delta\, g / \delta\, x = 0 \quad ; \quad \delta\, g / \delta\, y = 0 \quad ; \quad \text{esto es:}$$

$$\begin{cases} I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y = 0 \\ - I_{xy} \cdot x + I_y \cdot y = 0 \end{cases}$$

, que es un sistema homogéneo y compatible, que admite la única solución impropia o trivial:

$$x = y = 0 \ .$$

Por otra parte, la ecuación reducida de dicha "primera elipse territorial de inercia", vendrá dada por la expresión:

$$S_1 \cdot X^2 + S_1 \cdot Y^2 + I'_3 / I'_2 = 0 \ ,$$

siendo S_1 y S_2 las raíces o soluciones de la ecuación de 2º grado:

$$S^2 - I'_1 \cdot S + I'_2 = 0 \ , \text{ dónde:}$$

$$\begin{cases} I'_1 = I_x + I_y = I_0 & \text{(invariante métrico o lineal).} \\ I'_2 = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 & \text{(invariante afín o cuadrático).} \\ I'_3 = - I_x \cdot I_y + I_{xy}^2 = - I'_2 & \text{(invariante proyectivo o cúbico).} \end{cases}$$

Con ello, la ecuación reducida de la elipse territorial de inercia buscada será del tipo:

$$S_1 \cdot X^2 + S_2 \cdot Y^2 = 1 \, .$$

La noción de **elipse territorial de inercia** puede tener gran trascendencia en el Análisis Territorial (FRANQUET, 1990/91). Notemos que las longitudes de sus ejes y su posición en el plano dependen de la forma o configuración del territorio. Como la distancia entre el origen de coordenadas y un punto arbitrario N de la elipse es igual a:

$$ON = 1/\sqrt{I_e}$$

donde I_e es el momento territorial de inercia respecto al eje ON, resultará que, al construir la elipse, será fácil calcular el momento territorial de inercia respecto a una recta cualquiera que pase por el origen de coordenadas. En particular, es inmediato comprobar que el momento territorial de inercia es máximo respecto al eje menor de esta elipse, y mínimo respecto a su eje mayor. Sus ejes, en fin, coinciden con los ejes principales de inercia del polo O (ver el epígrafe anterior 7).

La elipse correspondiente al centro territorial de masas, recibirá la denominación de "elipse central del territorio".

Por otra parte, calculando el "radio medio o de giro" (definido en el epígrafe 3) correspondiente a los momentos territoriales de inercia referidos a ejes que pasen por un polo O, y trazando rectas paralelas a dichos ejes, la envolvente de ellas constituye la **segunda elipse territorial de inercia** (dichas dos elipses serán semejantes y estarán semejantemente colocadas).

Si sobre el primer eje principal, de los que pasan por el centro territorial de masas de renta o de población, se toma a ambos lados del mismo una cierta longitud, se obtienen los **focos territoriales de inercia.** Los momentos territoriales de inercia con respecto a todas las rectas que pasan por ellos tienen el mismo valor; la elipse se convierte, pues, en un **círculo territorial de inercia.**

Valiéndose de los mencionados focos de inercia, podremos determinar inmediatamente, para cualquier punto o enclave del territorio, las direcciones de los dos ejes principales territoriales de inercia: serán las bisectrices de los ángulos que forman los dos radios que partiendo de dichos focos se dirigen al punto de referencia.

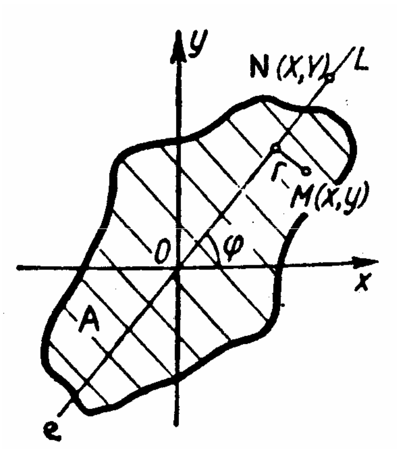


Fig. A-14.20. Elipse territorial de inercia (I).

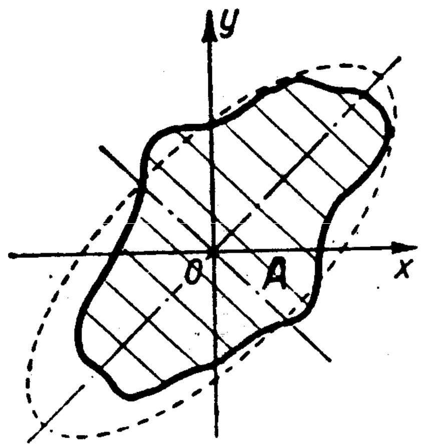


Fig. A-14.21. Elipse territorial de inercia (II).

12. CÁLCULO MECÁNICO DE LOS MOMENTOS TERRITORIALES

En general, en el cálculo de los momentos territoriales estáticos y de inercia, debe actuarse del siguiente modo:

a) Tomar los elementos de referencia, como los ejes (geográficos, administrativos, vías de comunicación...) o los puntos del territorio (centros de masas, capitalidades territoriales...) y también las coordenadas geográficas UTM que posibiliten los cálculos más sencillos.

b) Referir a esos momentos territoriales de inercia, más simples, los demás que se precisen, mediante los teoremas demostrados como aplicación de la Mecánica Física (Poinsot y Steiner).

c) Agrupar los elementos equidistantes del punto (POLO) o eje respecto del cual se está calculando el momento territorial que nos ocupa.

d) Se traza, sobre un mapa o plano del territorio suficientemente preciso, una franja representativa y su rectángulo genérico correspondiente.

e) Se efectúa el producto del área del rectángulo por la distancia de su centro geométrico o centroide al eje territorial o punto de referencia, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

f) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral, suponiendo que el número de estos rectángulos crece indefinidamente.

A efectos operativos, conviene tener presente que el momento estático y el momento de inercia de un territorio A, respecto al eje x, vienen dados, respectivamente, por:

$$M_x = \iint_A y \cdot dx \cdot dy = 1/2 \int_C y^2 \cdot dx \; ; \; I_x = \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = 1/3 \int_C y^3 \cdot dx$$

extendidas las integrales curvilíneas de los segundos miembros al contorno del recinto territorial. Se consigue una obtención mecánica de dichas integrales con el dispositivo indicado esquemáticamente en la figura siguiente A-14.22, denominada "integrador", cuya descripción desarrollamos a continuación (PUIG, 1970).

El estilete **E** describe la curva arrastrando una varilla **l** sobre la que va montada una ruedecilla **R** que se desliza y gira sobre el papel. El otro extremo está obligado a describir la recta respecto de la cual se calcula el momento (eje x). Al girar esta varilla, gira solidariamente a ella una rueda con la que engranan otras dos de radios mitad y un tercio y que giran, por tanto, ángulos dobles y triples del ángulo θ girado por **l**. Estas ruedas arrastran a su vez sendos vástagos sobre las que van montadas dos nuevas ruedecillas R_2, R_3 (la R_2 en un eje perpendicular). Al cerrar la curva, la suma de los corrimientos periféricos de cada una de estas ruedas, debidos a las rotaciones instantáneas de **l,** son nulas (excluimos el caso en que **l** da un giro completo), de modo que R_1, R_2, R_3 sólo integran sus corrimientos debidos a las traslaciones dx, que son, respectivamente, proporcionales a: sen $\theta \cdot$ dx, cos $2\theta \cdot$ dx, sen $3\theta \cdot$ dx. Las lecturas suministradas por R_1, R_2 y R_3, serán, pues, proporcionales, respectivamente, a las integrales trigonométricas:

$$\int \text{sen}\,\theta \cdot dx \quad , \quad \int \cos 2\theta \cdot dx \quad , \quad \int \text{sen}\,3\theta \cdot dx$$

Ya sabemos que la lectura de R_1 da el área Ω encerrada por la curva perimetral del territorio A.

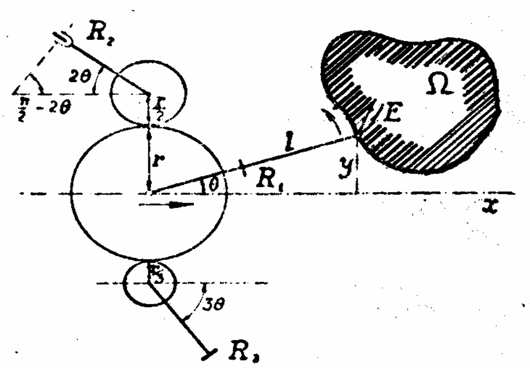


Fig. A-14.22. Integrador.

Ahora bien, $1/2\ y^2 = 1/2\ l^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta = l^2/4 \cdot (1 - \cos 2\theta)$, de donde:

$$1/2 \int_C y^2 \cdot dx = - l^2/4 \int_C \cos 2\theta \cdot dx$$

, integral que vendrá dada por la lectura en R_2 y análogamente:

$$1/3 \int_C y^3 \cdot dx = 1/3 \int_C l^3 \cdot \text{sen}^3\,\theta = l^2/12 \int_C (3l \cdot \text{sen}\,\theta - l \cdot \text{sen}\,3\theta)\,dx$$

, que vendrá dada por combinación de las lecturas en R_1 y R_3. Relacionando, por último, dichas lecturas con la escala gráfica del plano o mapa del territorio estudiado (que debe ser suficientemente preciso), obtendremos los valores de los momentos territoriales buscados, a expresar, respectivamente, en Km^3 y Km^4 (o bien en Mm^3 ó Mm^4).

13. EL "GRADO DE CONEXIÓN TERRITORIAL"

13.1. ATRACCIÓN TERRITORIAL

Resulta obvio que los momentos territoriales de inercia denotan, de algún modo, el grado de atracción o repulsión experimentado por un territorio respecto de un eje o de un punto situados dentro o fuera de él. De este modo, podemos medir el que pudiéramos denominar "grado de repulsión" entre dos núcleos territoriales **i** y **j** (por ejemplo, dos cabeceras de comarca, o entre una cabecera de comarca y otra de región o nación) mediante una expresión del tipo:

$$\rho'_{ij} = I_{ij}$$

, ya sea utilizando los momentos territoriales de inercia superficiales o los ponderales.

Sin embargo, como -en buena lógica- deberíamos introducir en nuestra formulación elementos que denuncien o subrayen la influencia biyectiva o biunívoca de las masas territoriales respectivas de población o de renta en las mencionadas atracciones o repulsiones económicas, emplearemos las rentas totales familiares disponibles R_i y R_j en forma de cociente entre las mismas, esto es: R_i/R_j, cuya determinación habremos efectuado previamente mediante el correspondiente modelo estructural (ver capítulo 3), o bien mediante la obtención de datos secundarios (existen publicaciones diversas que ofrecen información acerca de esta importante variable macroeconómica y de su evolución temporal). Pues bien, coordinando esta formulación con la empleada anteriormente para el modelo estrictamente gravitatorio (ver el apartado 2 del anterior capítulo 5), y al objeto de no incurrir en una ponderación excesiva de dicho efecto másico, se tendrá que:

$$\rho_{ij} = (I_{ij} / 10^6) \cdot \sqrt[3]{R_i / R_j} \quad ,$$

donde la ponderación tiene lugar mediante la raíz cúbica de la expresada relación de masas de renta, y cuya inversa nos determinaría, contrariamente, el "grado de atracción" ejercido desde el punto **j** hacia la superficie del territorio A cuya capitalidad o centro de masas viene dado por el punto **i**. O sea:

$$\alpha_{ij} = 1 / \rho_{ij} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}} \quad ,$$

y, del mismo modo, recíprocamente, se tendrá:

$$\alpha_{ji} = 1 / \rho_{ji} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}}{I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j}} \quad .$$

Obsérvese que, al objeto de obtener unos coeficientes cómodamente manipulables a los efectos del cálculo numérico y de su aplicabilidad posterior, hemos introducido el factor corrector adimensional de valor 10^6 en las fórmulas precedentes.

Del mismo modo, podemos definir el "grado medio de atracción" entre los territorios **i** y **j** como la media geométrica (raíz cuadrada del producto) de sus respectivos "grados de atracción". Esto es:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sqrt{\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}} \quad ; \quad \text{o también: } \lambda_{ij} / \alpha_{ji} = \alpha_{ij} / \lambda_{ij}$$

con lo que, substituyendo valores, obtendremos la expresión:

$$\lambda_{ij} = \sqrt{\frac{10^6}{I_{ij}} \times \frac{\sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i}} \times \frac{10^6}{I_{ji}} \times \frac{\sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j}}} = \sqrt{\frac{10^{12}}{I_{ij} \cdot I_{ji}}} = \frac{10^6}{\sqrt{I_{ij} \cdot I_{ji}}} \quad ,$$

que posee la particularidad interesante de no depender más que de los momentos territoriales de inercia recíprocos I_{ij} e I_{ji} y, globalmente, de su media geométrica, en proporción inversa (FRANQUET, 1990/91).

Considerando, así mismo, que:

$$I_{ij} \times I_{ji} = A_i \times A_j \times r_{ij}^{\ 4}$$

se tendrá la expresión (en función de la superficie de ambos territorios y de la distancia que los separa):

$$\boxed{\lambda_{ij} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \times \sqrt{A_i \cdot A_j}}} \quad .$$

Debe hacerse constar, llegados a este punto, que en las diferentes formulaciones que aquí se propugnan sería posible sustituir alternativamente las distancias entre los núcleos territoriales (ya sean medidas por carretera o en línea recta sobre el mapa) por los "tiempos de desplazamiento" que, de poderse conocer con cierto grado de aproximación resultarían indicadores mayormente fiables que subsumirían las dificultades del trazado viario, el estado de conservación o la categoría de las carreteras y la consecuente velocidad media que los vehículos pueden alcanzar por las mismas.

Considerando, ahora, los momentos territoriales de inercia recíprocos del tipo másico o ponderal, resultará que:

$$I_{ij} \cdot I_{ji} = R_i \cdot R_j \cdot r_{ij}^4 \quad ,$$

con lo que se tendrá (en función de las rentas familiares disponibles totales de ambos territorios y de la distancia que los separa):

$$\lambda_{ij} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \times \sqrt{R_i \cdot R_j}} = \lambda_{ji} \quad ,$$

al tiempo que los "grados de atracción" correspondientes, serán:

$$\alpha_{ij} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{r_{ij}^2 \cdot R_i \cdot \sqrt[3]{R_i}} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{r_{ij}^2 \cdot \sqrt[3]{R_i^4}} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} \quad ,$$

y, del mismo modo:

$$\alpha_{ji} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \quad .$$

(Efectivamente, se tendrá que:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sqrt{\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}} = \sqrt{\alpha_{ij}} \cdot \sqrt{\alpha_{ji}} =$$

$$= \left(\frac{10^3}{r_{ij}} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_j}{R_i^4}}\right) \cdot \left(\frac{10^3}{r_{ij}} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_i}{R_j^4}}\right) = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\sqrt[6]{R_i \cdot R_j}}{\sqrt[6]{(R_i \cdot R_j)^4}} =$$

$$= \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{(R_i \cdot R_j)^3}} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \cdot \sqrt{R_i \cdot R_j}} \quad \text{, c.s.q.d.)}$$

13.2. COMPENSACIÓN TERRITORIAL

Si ahora imponemos la condición de igualdad estricta de los "grados de atracción" respectivos entre los territorios **i** y **j**, resultará lo siguiente (cuando tenga lugar dicho equilibrio económico-espacial):

$$\alpha_{ij} = \frac{10^6}{I_{ij}} \cdot \frac{\sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i}} = \frac{10^6}{I_{ji}} \cdot \frac{\sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j}} = \alpha_{ji} \quad ,$$

pero como los momentos territoriales de inercia recíprocos, serán:

$$\begin{cases} I_{ij} = A_i \cdot r_{ij}^2 \\ I_{ji} = A_j \cdot r_{ij}^2 \end{cases}$$

sustituyendo en la identidad primera y reduciendo términos, obtendremos:

$$\frac{\sqrt[3]{R_j}}{A_i \cdot \sqrt[3]{R_i}} = \frac{\sqrt[3]{R_i}}{A_j \cdot \sqrt[3]{R_j}} \quad ; \quad \text{o sea:} \quad A_i \cdot \sqrt[3]{R_i^2} = A_j \cdot \sqrt[3]{R_j^2} \quad ;$$

de dónde:

$$\frac{A_i}{A_j} = \sqrt[3]{\frac{R_j^2}{R_i^2}} \quad ; \quad (A_i / A_j)^3 = (R_j / R_i)^2 \quad \text{, o bien:}$$

$$A_i^3 \cdot R_i^2 = A_j^3 \cdot R_j^2 \quad ,$$

que podría enunciarse así: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando el cubo de la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón inversa de sus rentas totales"** (caso superficial o geométrico).

En el caso de considerar los momentos territoriales de inercia del tipo másico o ponderal, tendrá lugar, del mismo modo, la identidad atraccional siguiente:

$R_j / R_i^4 = R_i / R_j^4$, o sea: $R_i^5 = R_j^5$, lo que implica: $\mathbf{R_i = R_j}$,

luego, correlativamente, podremos enunciar que **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando sus rentas totales son iguales"** (caso ponderal o másico), lo que se deduce inmediatamente de las fórmulas de dichos grados de atracción.

Si introducimos, ahora, el concepto de "densidad de renta", obtenido como medida relativa del anterior modelo estructural (véase el capítulo 3 de nuestro trabajo), se tendrá, en dicha condición de equilibrio:

$\delta_i = R_i / A_i$; $\delta_j = R_j / A_j$ con lo que:

$$\begin{cases} R_i = \delta_i \cdot A_i \\ R_j = \delta_j \cdot A_j \end{cases} \text{; o sea: } A_i^5 \cdot \delta_i^2 = A_j^5 \cdot \delta_j^2 \ ,$$

o también: $(A_i / A_j)^5 = (\delta_j / \delta_i)^2 = (d_j \cdot w_j / d_i \cdot w_i)^2$

que, a su vez, podría enunciarse así: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando la quinta potencia de la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón inversa de sus densidades de renta"** (caso superficial o geométrico).

Obsérvese que hemos considerado, en la formulación antecedente, que:

$P_i = d_i \cdot A_i$; $R_i = P_i \cdot w_i = d_i \cdot A_i \cdot w_i$

$P_j = d_j \cdot A_j$; $R_j = P_j \cdot w_j = d_j \cdot A_j \cdot w_j$; de dónde:

$\delta_i = R_i / A_i = d_i \cdot w_i$

$\delta_j = R_j / A_j = d_j \cdot w_j$ c.s.q.d. , siendo:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A = \text{áreas de los territorios (km}^2\text{).} \\
R = \text{rentas totales de los territorios (€).} \\
P = \text{poblaciones de los territorios (hab.).} \\
w = \text{rentas "per capita" de los territorios (€/hab.).} \\
d = \text{densidades de población de los territorios (hab./km}^2\text{).} \\
\delta = \text{densidades de renta de los territorios (€/km}^2\text{).} \\
r = \text{distancia entre los territorios (km).}
\end{array}
\right.
$$

Por último, veamos que en el caso ponderal o másico, se cumplirá que:

$$R_i = R_j \quad \text{, o sea:} \quad A_i \cdot \delta_i = A_j \cdot \delta_j \quad , \quad \text{con lo que, también:}$$

$$A_i / A_j = \delta_j / \delta_i = d_j \cdot w_j / d_i \cdot w_i \quad ,$$

que podemos enunciar del siguiente modo: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de signos opuestos cuando la razón de sus áreas es igual a la razón inversa de sus densidades de renta"** (caso ponderal o másico).

13.3. LIGAZÓN O CONEXIÓN TERRITORIAL

13.3.1. Concepto y definición

Llegados a este punto, podemos definir como "grado de conexión" entre dos territorios **i** y **j** a la suma de sus respectivos "grados de atracción", que, para valores suficientemente próximos $\alpha_{ij} \approx \alpha_{ji}$, puede asimilarse a: $2\cdot\lambda_{ij} = 2\cdot\bar{\alpha}$, siendo la media aritmética o semisuma de los "grados de atracción":

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \quad .$$

En el caso general de suponer un símil estático-gráfico en el que las fuerzas de atracción territoriales se hallen representadas por vectores que actúan en la dirección del "eje de conexión territorial" que une los centros de masas de renta o de población de ambos territorios, de sentidos opuestos y cuya magnitud o módulo será el "grado de atracción" antes definido, dicho "grado de conexión" vendrá dado por la expresión (FRANQUET, 1990/91):

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}} + \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_j}} =$$

$$= \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_j} \cdot I_{ji} + 10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i} \cdot \sqrt[3]{R_i} \cdot I_{ij}}{(I_{ij} \cdot I_{ji}) \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} =$$

$$= \frac{10^6 \cdot (I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i^2} + I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j^2})}{(I_{ij} \cdot I_{ji}) \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} = \theta_{ji} \ ,$$

que nos determina la cuantía del "esfuerzo de tracción" territorial de aquel eje rígido, siguiendo con nuestro símil físico-mecánico.

En definitiva, el "grado de conexión" entre dos territorios, que acabamos de definir, se halla en función de varios parámetros propios y bien característicos de los mismos, a saber:

- de sus áreas superficiales.
- de las distancias entre sus "centros de masas" o capitales.
- de sus rentas "per capita".
- de sus poblaciones,

lo que le dota de un nivel de información que se estima suficiente a los efectos de su credibilidad y eficiencia.

Por otra parte, como:

$$\lambda_{ij}^2 = \frac{10^{12}}{I_{ij} \cdot I_{ji}} \quad \text{, se tendrá que:}$$

$$\theta_{ij} = \lambda_{ij}^2 \cdot \frac{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i^2} + I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j^2}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} =$$

$$= \lambda_{ij}^2 \left(\frac{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}} + \frac{I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_{ij}^2}{10^6}(I_{ij}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}} + Iji\cdot\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i}})\ ;$$

teniendo, ahora, presente las anteriores definiciones, a saber:

$$\frac{1}{\alpha_{ij}\cdot I_{ij}} = \frac{\rho_{ij}}{I_{ij}} = \frac{1}{10^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}\text{, y también:}$$

$$\frac{1}{\alpha_{ji}\cdot I_{ji}} = \frac{\rho_{ji}}{I_{ji}} = \frac{1}{10^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i}}\quad ,$$

de dónde resultará, en definitiva, que:

$$\theta_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{\alpha_{ij}} + \frac{\lambda_{ij}^2}{\alpha_{ji}} = \lambda_{ij}^2\,(\rho_{ij} + \rho_{ji}) = \theta_{ji}$$

, expresión ésta de gran utilidad y significación, puesto que nos relaciona entre sí a todos los parámetros que definimos en nuestro estudio acerca de la conexión o ligazón territorial.

13.3.2. Rigidez, deformación y segregación de un territorio

En este orden de ideas, diremos que un territorio (entendido como un sistema de partículas o masas económicas elementales ligadas por fuerzas económicas de atracción mutua, es decir, por fuerzas interiores) permanecerá "rígido" o invariable en su configuración actual si las distancias mutuas entre todos sus puntos permanecen constantes. Ello sucederá porque entre aquellos puntos o lugares geográficos actuarán fuerzas interiores de atracción y repulsión que les obligarán a mantener una cierta posición relativa, y cuya evaluación o cuantificación tendrá lugar mediante los parámetros que acabamos de definir. Por otra parte, dichas fuerzas económicas internas resistirán ilimitadamente a las influencias externas, por lo que no se producirán "deformaciones" en las dimensiones del territorio.

Sin embargo, en la práctica podemos encontrarnos con territorios que se hallan lejos de tener una "rigidez" estructural o resistencia ilimitada a la acción de las fuerzas económicas exteriores provenientes de los territorios vecinos, pudiendo “deformarse" fácilmente bajo la acción de las mismas, por lo que deberían estudiarse las reacciones o esfuerzos internos que se desarrollan en dichos territorios para contrarrestar la acción modificativa de las fuerzas económicas que le son aplicadas desde el sistema exterior. De este modo, cuando un territorio se somete a la acción de fuerzas exteriores, se desarrollan en su interior esfuerzos o tensiones que provocan más o menos "deformación", y el conocimiento, siquiera aproximado, de los valores de dichos esfuerzos y deformaciones puede resultar de gran importancia en los estudios de Ordenación Territorial. En algunos casos, las tensiones económico-sociales experimentadas en el territorio por la acción de las fuerzas económicas exteriores constituirán el factor decisivo, mientras que, en otros casos, será la "deformación" planimétrica producida (modificativa de las fronteras administrativas) el factor más transcendente.

Sería posible, en definitiva, y tomando como base las ideas aquí expuestas, el planteamiento y desarrollo de una cierta "teoría del contraste de los grados o fuerzas económicas de atracción y repulsión" entre los diferentes territorios, al objeto de establecer racionalmente sus posibles segregaciones y/o agrupaciones administrativas y económicas. Y así, por ejemplo, sería factible establecer -por imperativo legal- la cuantía mínima que debería alcanzar el "grado de conexión territorial" θ_{ij}, o bien la que, en el epígrafe siguiente denominaremos "fuerza de atracción económica" F_{ij}, que tienen lugar entre un municipio cualquiera i y una parte del mismo j (normalmente se tratará de una pedanía, entidad local menor o entidad municipal descentralizada) que pretenda su segregación administrativa para constituir un nuevo municipio. Dicho procedimiento, como ya se ha visto, tendría en cuenta diversos parámetros bien característicos del territorio (superficie, población, distancia y rentas), y los trámites previstos y regulados en las correspondientes leyes de régimen local para la concesión de aquella segregación únicamente deberían iniciarse a partir del cumplimiento de dicho requisito mínimo.

Del mismo modo cabría operar con la adscripción administrativa racional, por lo menos desde el punto de vista del equilibrio económico-espacial, de un municipio a una determinada comarca, o bien de una comarca a una determinada región. Ello se ejemplificará posteriormente en la aplicación de nuestro estudio a Cataluña y en la resolución de diversos casos dudosos de adscripción alternativa de comarcas a determinadas regiones o veguerías.

La precaución mencionada, sin duda alguna, tendería a evitar la formación de pequeños núcleos por razones viscerales y extrañas -con frecuencia- a la racionalidad administrativa en la organización territorial y en la prestación de los servicios públicos, con un coste político y social elevado (tal como hemos podido comprobar en Cataluña en los últimos tiempos, así como en otras Comunidades Autónomas) y en contra del criterio -mucho más moderno y operativo- de la formación de economías de escala o de acumulación en la prestación de dichos servicios.

Veamos, en fin, que idéntica problemática segregacionista o independentista podría presentarse y resolverse, racionalmente, en lo relativo a la pertenencia de determinadas provincias o regiones a las naciones o a los Estados (FRANQUET, 1990/91).

13.4. EL ENFOQUE GRAVITATORIO DEL PROBLEMA

El concepto de "fuerza de atracción económica" F_{ij}, definido en nuestro modelo gravitatorio de división territorial (ver el anterior apartado 2 del capítulo 5) entre dos núcleos territoriales **i** y **j**, puede resultar especialmente útil para el estudio y evaluación del grado de conexión territorial entre los mismos. En efecto, se tiene, genéricamente, que:

$$F_{ij} = G \times \frac{(w_i \cdot P_i^{\alpha}) \times (w_j \cdot P_j^{\beta})}{r_{ij}^{b}} = F_{ji} \ ,$$

siendo, para nuestro caso:

P_i	=	población del núcleo **i** (hab.)
P_j	=	población del núcleo **j** (hab.)
w_i	=	renta per capita del núcleo **i** (€/hab.)
w_j	=	renta per capita del núcleo **j** (€/hab.)
r_{ij}	=	distancia que separa los núcleos **i** y **j** (km.)
G	=	constante correspondiente a la gravitación universal. Resulta determinable por estudios empíricos. Aquí, le daremos el valor: G = 1.
$\alpha = \beta = 1$ (parámetros experimentales).		
b	=	3 (parámetro experimental).

Como puede observarse -en aras de una mayor uniformidad conceptual- hemos optado por conferir a los parámetros o coeficientes de la fórmula anterior unos valores similares a los ya adoptados para el modelo gravitatorio anteriormente expuesto. Con ello, en definitiva, resultará la expresión siguiente (en función, ahora, de las rentas totales familiares disponibles de ambos núcleos territoriales):

$$F_{ij} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{\delta_i \times \delta_j \times A_i \times A_j}{r_{ij}^3} = \frac{\delta_i \times \delta_j \times I_{ij} \times I_{ji}}{r_{ij}^7} = F_{ji}$$

que, al contrario de los anteriormente definidos "grados de atracción" α_{ij} y α_{ji}, posee un carácter bidireccional, y cuyos valores específicos para el caso de las comarcas y regiones catalanas en 1986 y 1996, han sido convenientemente calculados y tabulados (ver el capítulo correspondiente de nuestro trabajo).

Por último, notemos que su relación con el "grado de conexión" territorial anteriormente definido, contemplará que:

$$\sqrt[3]{R_i \cdot R_j} = r_{ij} \times \sqrt[3]{F_{ij}} \quad \text{, con lo que:}$$

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6 (I_{ij} \times R_i^{2/3} + I_{ji} \times R_j^{2/3})}{I_{ij} \times I_{ji} \times r_{ij} \times \sqrt[3]{F_{ij}}} =$$

$$= \frac{10^6 (I_{ij} \times R_i^{2/3} + I_{ji} \times R_j^{2/3})}{A_i \times A_j \times r_{ij}^5 \times \sqrt[3]{F_{ij}}} = \theta_{ji} \ .$$

Razonando paralelamente (FRANQUET, 1990/91), veamos que el "grado de conexión territorial" entre dos territorios **i** y **j** vendrá dado, en el caso ponderal o másico, por la siguiente expresión:

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} + \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \right) =$$

$$= \lambda_{ij} \ . \ \sqrt{R_i \cdot R_j} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} + \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_{ij} \cdot \sqrt{R_i} \cdot \sqrt{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i^4}} + \frac{\lambda_{ij} \cdot \sqrt{R_i} \cdot \sqrt{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j^4}} =$$

$$= \frac{\lambda_{ij} \cdot R_j^{5/6}}{R_i^{5/6}} + \frac{\lambda_{ij} \cdot R_i^{5/6}}{R_j^{5/6}} = \lambda_{ij} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_j^5}{R_i^5}} + \lambda_{ij} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_i^5}{R_j^5}} =$$

$$= \lambda_{ij} \left(\sqrt[6]{(\frac{R_j}{R_i})^5} + \sqrt[6]{(\frac{R_i}{R_j})^5} \right) = \theta_{ji}$$

Del mismo modo, en el caso ponderal o másico, la "fuerza de atracción económica" $F_{ij} = F_{ji}$ entre dos núcleos territoriales **i** y **j**, vendrá dada por:

$$F_{ij} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{I_{ij} \times I_{ji}}{r_{ij}^7} \quad ,$$

que, por su propia naturaleza, como ya se ha dicho, posee un carácter bidireccional.

Veamos, en fin, que la determinación de la constante G podría realizarse desde la expresión:

$$G = \frac{F_{ij} \cdot r_{ij}^b}{(w_i \cdot P_i^\alpha) \times (w_j \cdot P_j^\beta)} = \frac{F_{ij} \cdot r_{ij}^b}{m_i \cdot m_j} \quad ,$$

a partir del conocimiento previo de la fuerza de atracción económica $F_{ij} = F_{ji}$, mediante la Dinámica Económica[3], de las magnitudes de las masas económicas ponderadas de ambos territorios (empleando los correspondientes estudios estructurales) y de la distancia que separa sus centros territoriales de masas (previa la determinación de los mismos por los procedimientos señalados en el apartado 2 del anterior Anexo), ya sea desde el punto de vista estricto de la longitud geofísica en línea recta o por carretera, o bien de los tiempos de desplazamiento entre ambos.

Por otra parte, la determinación más precisa de G permitirá hallar,

[3] Se sugiere, al respecto, la consulta del capítulo 10 ("Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas") del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

indirectamente, la masa económica de los territorios conociendo el valor de las restantes variables, y teniendo presente que la "constancia" de G puede estar sólo limitada a ciertos campos gravitatorios económicos, debiendo ser recalculada para los restantes.

Es obvio, en cualquier caso, que la constante G representará la fuerza económica con la cual se atraen dos territorios **i** y **j** cuyas masas económicas sean iguales a la unidad de masa de población (habitantes) o de renta (euros), separados entre sí por una distancia igual a la unidad de distancia considerada (expresable, normalmente, en Km ó Mm, o bien en horas si se tratase de tiempos de desplazamiento).

14. PROBLEMAS EN EL CAMPO CONTÍNUO

14.1. MOMENTOS TERRITORIALES ESTÁTICOS

Si la masa de renta por unidad superficial es prácticamente la misma en todo el territorio estudiado, podemos también suponer que su densidad de renta: δ = cte. Sabemos, por otra parte, que el momento territorial estático o de primer orden de un territorio **A** con respecto a un eje territorial cualquiera (momento áxico o ecuatorial) es igual a la suma de los productos de sus áreas elementales por sus respectivas distancias a dicho eje. Dicha hipótesis de trabajo, nos equipara las determinaciones de los momentos territoriales superficiales con los ponderales o másicos (FRANQUET, 1990/91).

Sea, por ejemplo, una cierta comarca que supondremos homogénea, y cuya configuración planimétrica aproximada puede verse en la figura siguiente:

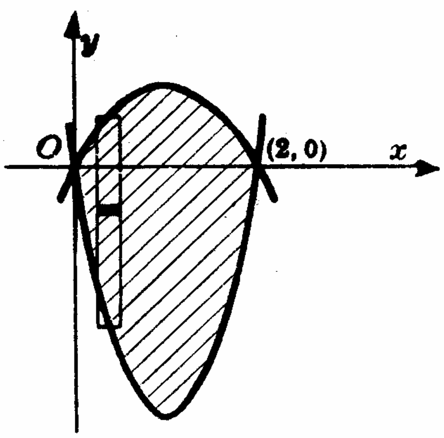


Fig. A-14.23. Comarca de densidad de renta constante (I).

Obsérvese que podemos asimilar, con buena aproximación, el área o superficie de esta comarca con la determinada por la intersección de las parábolas cuadráticas de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 3x^2 - 6x \end{cases}$$

en el primer y cuarto cuadrantes del círculo, respectivamente.

Como siempre, para el logro de una mayor simplicidad operativa, se han expresado las distancias en miriámetros (1 Mm = 10 Km), con lo que se tendrá la siguiente superficie comarcal, empleando para su cómputo la integración doble:

$$A = \iint_A dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy \cdot dx = \int_0^2 (2x - x^2 - 3x^2 + 6x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (8x - 4x^2) \cdot dx = [\,4x^2 - 4x^3/3]_0^2 = 48/3 - 32/3 = 16/3\ \text{Mm}^2 = 533\ \text{Km}^2$$

El momento estático comarcal con respecto al eje OX, será:

$$M_X = \iint_A y \cdot dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y \cdot dy \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 [(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2] \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 (4x^2 + x^4 - 4x^3 - 9x^4 - 36x^2 + 36x^3) \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 (32x^3 - 8x^4 - 32x^2) \cdot dx = 4\,[x^4]_0^2 - 4/5\,[x^5]_0^2 - 16/3\,[x^3]_0^2 =$$

$$= 64 - 128/5 - 128/3 = -\,64/15\ \text{Mm}^3 = -\,4.267\ \text{Km}^3\ .$$

El momento estático comarcal con respecto al eje OY, será:

$$M_Y = \iint_A x \cdot dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 x \cdot (8x - 4x^2) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) \cdot dx = 8/3\,[x^3]_0^2 - [x^4]_0^2 = 64/3 - 16 =$$

$$= 16/3\ \text{Mm}^3 = 5.333\ \text{Km}^3\ .$$

Desde luego, tal como vimos en epígrafes anteriores, también aquí podemos determinar las coordenadas del centro comarcal de masas G, esto es:

$$\begin{cases} x_0 = M_y / A = 5.333 / 533 = 10'00 \text{ Km.} \\ y_0 = M_x / A = -\ 4.267 / 533 = -\ 8'00 \text{ Km.} \end{cases}$$

, o sea, G (10'00, -8'00), que se halla, lógicamente, sobre el eje central territorial de simetría, donde también se hallan los extremos relativos o locales de la función perimetral, esto es, los puntos del territorio de coordenadas expresadas en Km.: MÁX. (10'00, 10'00) y MÍN. (10'00, -30'00).

14.2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA

a) Masa de renta homogénea (δ = cte.):

Con las mismas hipótesis de homogeneidad en la distribución de las masas de renta que en el caso anterior, y sabiendo que el momento territorial de inercia de A con respecto a un eje será la suma de los productos de las áreas elementales por los cuadrados de sus respectivas distancias a dicho eje territorial, consideremos, ahora, una cierta comarca cuya configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

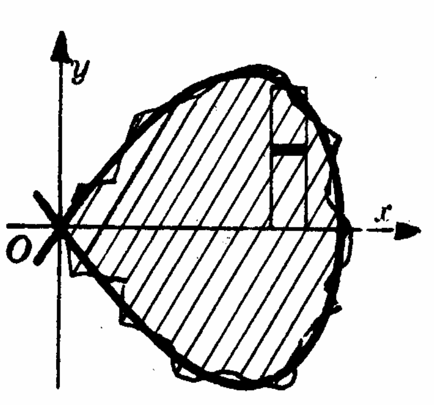


Fig. A-14.24. Comarca de densidad de renta constante (II).

En este caso, asimilaremos el área o superficie de esta comarca con la encerrada o comprendida por la curva de ecuación:

$y^2 = x^2 (2 - x)$, denominada "lazo",

habida cuenta de su configuración planimétrica, en el primer y cuarto cuadrantes del círculo.

La superficie comarcal vendrá dada por:

$$A = \iint_A dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy \cdot dx = 2\int_0^2 x \cdot \sqrt{2-x} \cdot dx \quad ,$$

Se trata de la integral de una función irracional, por lo que emplearemos el siguiente cambio de variable:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 - x = z^2 \\ x = 2 - z^2 \\ dx = -2z \cdot dz \end{array}}$$

, resultando los nuevos límites de integración:

$$\begin{cases} \text{para } x = 0 \text{ ——— } z = \sqrt{2} \\ \text{para } x = 2 \text{ ——— } z = 0 \end{cases}$$

esto es:

$$A = -4 \int_{\sqrt{2}}^{0} z^2 (2 - z^2) \cdot dz = -4 \left(2/3\, z^3 - z^5/5\right)_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 32\sqrt{2}/15 \text{ Mm}^2 \approx 302 \text{ Km}^2$$

El momento de inercia comarcal ecuatorial con respecto al eje OX, vendrá dado por:

$$I_x = \iint_A y^2 \cdot dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2 \cdot dy \cdot dx = 2/3 \int_0^2 x^3 (2 - x)^{3/2} \cdot dx =$$

$$= -4/3 \int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)^3 \cdot z^4 \cdot dz = -4/3 \left(8/5 \cdot z^5 - 12/7 \cdot z^7 + 2/3 \cdot z^9 - z^{11}/11\right)_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 2.048\sqrt{2} \,/\, 3.465 \text{ Mm}^4 = 8.359 \text{ Km}^4 = 64 / 231 \text{ A}.$$

Del mismo modo, el momento de inercia comarcal ecuatorial con respecto al eje OY, será:

$$I_y = \iint_A x^2 \cdot dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2 \cdot dy \cdot dx = 2\int_0^2 x^3 \sqrt{2-x} \cdot dx =$$

$$= -4 \int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)^3 \cdot z^2 \cdot dz = -4 \left[8/3 \cdot z^3 - 12/5 \cdot z^5 + 6/7 \cdot z^7 - 1/9 \cdot z^9\right]_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 1.024\sqrt{2} \,/\, 315 \text{ Mm}^4 = 45.973 \text{ Km}^4 = 32 / 21 \text{ A}.$$

Por último, el momento de inercia polar comarcal con respecto al centro de coordenadas O (0,0), será:

$$I_0 = I_x + I_y = 2.048\sqrt{2} \,/\, 3.465 + 11.264\sqrt{2} \,/\, 3.465 =$$

$= 13.312 \sqrt{2}$ / 3.465 Mm^4 = 54.332 Km^4 = 416 / 231 A.

En lo referente a la determinación de los **radios de giro comarcales** con respecto ambos ejes territoriales OX y OY, veamos que, al ser constante la densidad de renta a lo largo y ancho del territorio en estudio, serán del tipo superficial o geométrico, con lo que:

$$\rho_x = \sqrt{I_x / A} = \sqrt{8.359 / 302} = 5'26 \text{ Km.}$$

$$\rho_y = \sqrt{I_y / A} = \sqrt{45.973 / 302} = 12'34 \text{ Km.}$$

b) Masa de renta no homogénea o heterogénea (δ = variable):

b-0) Si la masa de renta por unidad superficial es distinta a lo largo y ancho del territorio estudiado, tendremos que su densidad de renta es también variable en el campo continuo. Este supuesto o hipótesis de trabajo puede considerarse perfectamente real, dado que no resulta difícil sospechar que dicha densidad de renta se acrecienta en las proximidades de la capital territorial, disminuyendo progresivamente con el alejamiento geofísico de dicho centro urbano.

b-1) En el siguiente ejercicio (FRANQUET, 1990/91), se trata de calcular el momento de inercia con respecto al eje OX de un municipio delimitado aproximadamente por el arco de la curva: y = sen x, y el propio eje de abscisas, sabiendo que su densidad de renta varía con la distancia a dicho eje territorial (la densidad de cada punto del territorio es proporcional a su distancia al eje OX).

Su configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

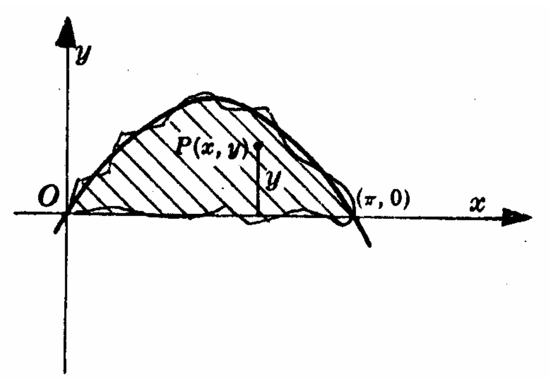


Fig. A-14.25. Municipio de densidad de renta variable (I).

Se tendrá la siguiente superficie municipal, en base al propio concepto de integral definida:

$$A = \int_0^\pi \text{sen } x \cdot dx = [- \cos x]_0^\pi = - \cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 =$$

$$= 2 \text{ Mm}^2 = 200 \text{ Km}^2$$

La masa de renta municipal vendrá dada por la integral doble:

$$m = \iint_A \delta (x, y) \cdot dA = \int_0^\pi \int_0^{\text{senx}} k \cdot y \cdot dy \cdot dx = k/2 \int_0^\pi \text{sen}^2 x \cdot dx =$$

$$= k/2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = k/4 \left[x - \frac{\text{sen } 2x}{2} \right]_0^\pi = (k \cdot \pi / 4) \text{ €}$$

Así pues, la densidad media de la renta municipal, será:

$$\overline{\delta} = m / A = \frac{k \cdot \pi / 4}{200} = (k \, . \, \pi / 800) \text{ €/Km}^2$$

El momento de inercia municipal con respecto al eje OX, vendrá dado por la expresión:

$$I_X = \iint_A \delta(x, y) \cdot y^2 \cdot dA = \int_0^\pi \int_0^{\text{senx}} k \cdot y \cdot y^2 \cdot dy \cdot dx = k/4 \int_0^\pi \text{sen}^4 x \cdot dx =$$

= (empleando fórmulas adecuadas de reducción) =

$$= k/4 \left[- \frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos x}{4} + 3/4 \int \text{sen}^2 x \cdot dx \right]_0^\pi =$$

$$= k/4 \left[- \frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos x}{4} + 3/4 \, (x/2 - \text{sen}2x/4) \right]_0^\pi = k/4 \, (3 \cdot \pi / 8) =$$

$$= \left(\frac{3 \cdot \pi \cdot k}{32} \right) \text{€} \cdot \text{Mm}^2 = (29'45 \cdot k) \text{ €} \cdot \text{Km}^2 = 3/8 \, m \quad ,$$

que resulta ser del tipo másico o ponderal.

En este caso, el momento municipal estático con respecto al mismo eje OX, será:

$$M_X = \iint_A \delta (x, y) \cdot y \cdot dA = \int_0^\pi \int_0^{\text{senx}} k \cdot y \cdot y \cdot dy \cdot dx =$$

$$= k/3\int_0^{\pi} \text{sen}^3 x \cdot dx = k/3\int_0^{\pi} \text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x \cdot dx =$$

$$= k/3\int_0^{\pi} \text{sen } x\,(1 - \cos^2 x) \cdot dx =$$

$$= k/3\,[\,-\cos x\ +\ \cos^3 x/3\,]_0^{\pi} = (4k / 9)\text{ €} \cdot \text{Mm} = (40k / 9)\text{ €} \cdot \text{Km}.$$

Por otra parte, al tener dicho territorio un eje de simetría en la recta de ecuación:

$$x = \pi / 2$$

, sobre él se hallará el centro de las masas municipales de renta G. Así pues, las coordenadas de dicho centro, como se sabe, vendrán dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} y_o = M_x / m = \dfrac{40\ k\ /\ 9}{k \cdot \pi\ /\ 4} = \dfrac{160}{\pi \cdot 9} = 5'66 \text{ Km.} \\[2ex] x_o = M_y / m = \pi / 2 = 15'71 \text{ Km.} \end{cases}$$

, o sea: G (15'71 Km, 5'66 Km).

En este caso, de un modo indirecto, podemos deducir el valor del momento municipal estático con respecto al eje OY, puesto que:

$$M_y = x_o \cdot m = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k \cdot \pi}{4} = \left(\frac{k \cdot \pi^2}{8}\right) \text{€} \cdot \text{Mm} = \left(\frac{5 \cdot k \cdot \pi^2}{4}\right) \text{€} \cdot \text{Km},$$

con lo que completaremos el cálculo de los momentos territoriales del municipio en cuestión (el conocimiento de los restantes momentos de inercia: I_y, I_o e I_{xy}, resulta de menor interés en este caso).

Por último, el radio municipal de giro con respecto al eje OX, que será del tipo másico o ponderal, se obtiene inmediatamente así:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{3m\ /\ 8}{m}} = 0'612 \text{ Mm} = 6'12 \text{ Km}$$

b-2) En el ejercicio que desarrollamos a continuación (FRANQUET, 1990/91), trátase de calcular el momento territorial de inercia, con respecto al eje OY, de un municipio delimitado por la curva: $y^2 = 1 - x$, en el primer cuadrante del círculo, sabiendo que la densidad de renta en cada punto es igual a **y** (desde luego, en las magnitudes reales, será: $\delta = k \cdot y$).

Su configuración planimétrica aproximada puede verse en la figura siguiente:

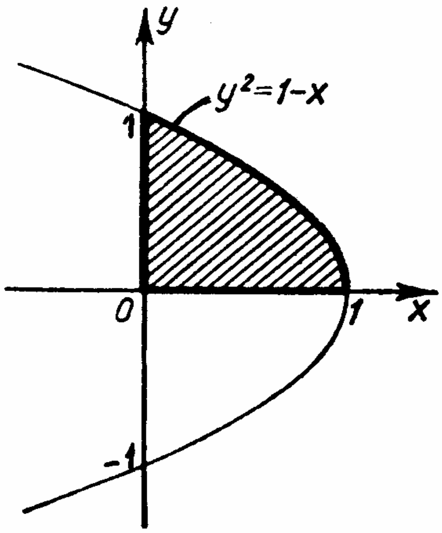


Fig. A-14.26. Municipio de densidad de renta variable (II).

Se tendrá la siguiente superficie municipal, en base al propio concepto de integral definida y de integral doble (es la integral de una función irracional, por lo que efectuaremos el oportuno cambio de variable):

$$A = \iint_A dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} dy \cdot dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot dx = \boxed{\begin{array}{l} 1 - x = t^2 \\ x = 1 - t^2 \\ dx = -2t \cdot dt \end{array}} =$$

$$= -2\int_1^0 t^2 \cdot dt = -2\,[\,t^3 / 3\,]_1^0 = 2/3 \text{ Mm}^2 = 66'66 \text{ Km}^2 .$$

Por otra parte, el momento de inercia municipal con respecto al eje OY, vendrá dado por la expresión:

$$I_y = \iint_A \delta(x, y) \cdot x^2 \cdot dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} y \cdot x^2 \cdot dy\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [x^2 \cdot y^2 / 2]_0^{\sqrt{1-x}} \cdot dx = 1/2 \int_0^1 x^2 (1 - x) \cdot dx = 1/24 \equiv (k / 24)\ € \cdot \text{Mm}^2 =$$

$$= (4'17 \cdot k) \text{ €} \cdot \text{Km}^2 = m / 6 \text{ .}$$

Así mismo, la masa de renta municipal vendrá dada por la integral doble:

$$m = \iint_A \delta(x, y) \cdot dA = \iint_A y \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} y \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [y^2 / 2]_0^{\sqrt{1-x}} \cdot dx = \int_0^1 [(1-x)/2] \cdot dx = 1/2 \int_0^1 (1 - x) \cdot dx =$$

$$= 1/2 \left([x]_0^1 - [x^2 / 2]_0^1 \right) = 1/2 (1 - 1/2) = 1/4 \equiv (k / 4) \text{ €} ,$$

con lo que la densidad media de la renta municipal, será:

$$\delta = \frac{m}{a} = \frac{k / 4}{200 / 3} = \left(\frac{3k}{800}\right) \text{ €/Km}^2 \text{ .}$$

En este caso, el radio municipal de giro representa la distancia a la que debe suponerse situada una masa única de renta **m** para que tenga idéntico momento ecuatorial de inercia respecto del eje territorial OY (ver epígrafe anterior 3.2). Esto es:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{k / 24}{k / 4}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0'408 \text{ Mm} = 4'08 \text{ Km.}$$

que es un radio territorial de giro másico o ponderal.

La determinación consecuente de los momentos municipales estáticos $\mathbf{M_x}$ y $\mathbf{M_y}$, restantes momentos de inercia (I_x, I_{xy} e I_O) así como del radio municipal de giro medio ρ_x y de las coordenadas del centro municipal de las masas de renta, se deducirán inmediatamente de las fórmulas anteriormente relacionadas.

*   *   *   *   *

(*) Si se trata de ejes rectangulares, se cumplirá que: $\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$; cos $\theta = 0$, con lo que: $I_0 = I_x + I_y$, como ya hemos visto con anterioridad.

(**) También es demostrable dicha desigualdad de Buniakovski-Schwarz para funciones f(x) y φ(x) integrables de una sola variable, adoptando entonces la configuración:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\cdot dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)\cdot dx\ .$$

En efecto, $\forall\ \lambda \in [R]$, se tiene:

$$\int_a^b [f(x)+\lambda\cdot\varphi(x)]^2\cdot dx \geq 0 \quad \text{, esto es:}$$

$$\int_a^b f^2(x)\cdot dx + 2\lambda\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx + \lambda^2\int_a^b \varphi^2(x)\cdot dx \geq 0\ .$$

Se cumple que: $\int_a^b \varphi^2(x)\cdot dx > 0$, pues para $\varphi(x) = 0$ la desigualdad de Buniakovski-Schwarz resulta trivial, y también el determinante funcional simétrico:

$$\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi^2(x)\cdot dx & \int_a^b \varphi(x)\cdot f(x)\cdot dx \\ \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx & \int_a^b f^2(x)\cdot dx \end{vmatrix} \geq 0 \quad , \quad \text{c . s. q. d.}$$